



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TÉRMICA Y DE FLUIDOS

ESTUDIO NUMÉRICO DEL EFECTO DE LA
RESISTENCIA TÉRMICA DE LA PARED EN
INTERCAMBIADORES DE CALOR DE
PLACAS PLANAS CON FLUJO LAMINAR
EN CONTRACORRIENTE

PROYECTO FINAL DE CARRERA
INGENIERÍA INDUSTRIAL

Director de proyecto: Marcos Vera Coello

Autor: Bernardo Rivero de Aguilar Pérez-Gabilondo

Octubre 2012



Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincera gratitud a todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este proyecto participando tanto directa como indirectamente, ya sea corrigiendo pequeños errores o apoyándome en los momentos más duros.

Gracias a mis compañeros y compañeras, amigos y amigas, a mi novia, que me habéis soportado y ayudado a lo largo de toda la carrera y sobre todo al final.

Gracias a Marcos Vera, por haber hecho posible la realización de este proyecto. Por su inestimable ayuda y por su capacidad para ver una salida cuando todo parece perdido.

Por último muchas gracias a mi familia, mis padres, abuelo, hermano, a mis tíos y primos, a todos, porque gracias a ellos estoy hoy aquí y soy quien soy. Este trabajo es para vosotros.

¡MUCHAS GRACIAS!

Resumen del proyecto

En este proyecto se estudia la evolución de la eficiencia de un intercambiador de calor de placas planas trabajando en contraflujo para diversos casos de estudio.

Dichos casos variarán desde un caso genérico (caso 2) en el que permitimos transferencia libre de calor en la pared de intercambio, es decir, transversal y longitudinal hasta un caso más simplificado (caso 0) que emplearemos como caso de referencia en el que la pared es térmicamente delgada. El caso intermedio (caso 1) centrará la mayor parte de nuestro estudio. Para este caso permitimos transferencia de calor únicamente de manera transversal a lo largo de la pared.

La manera de realizar los estudios de los casos 1 y 2 será simular el campo térmico completo del intercambiador variando el parámetro de resistencia térmica de la pared.

Por último realizaremos una similitud de los parámetros que hemos fijado para realizar las simulaciones con los valores que tomarían dichos parámetros con materiales y fluidos empleados en la actualidad por intercambiadores de calor reales, con el fin de dar validez al rango de valores con los que hemos simulado.

Índice

1. Introducción teórica-----	7
1.1 Definición de intercambiador de calor -----	7
1.2 Clasificación de los intercambiadores de calor -----	7
1.2.1 Según su geometría -----	7
1.2.2 Según la dirección y sentido de los flujos -----	13
1.3 Materiales empleados en la construcción de la pared de intercambio -----	15
2. Desarrollo teórico-----	17
2.1 Resumen del estudio a realizar -----	17
2.2 Desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso general -----	17
2.2.1 Hipótesis realizadas -----	18
2.2.2 Análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes -----	19
2.2.3 Condiciones de contorno-----	23
2.2.4 Resumen-----	26
2.3 Simplificaciones del sistema -----	27
2.3.1 Flujo de calor en la pared transversal y longitudinal (caso 2)-----	27
2.3.2 Primera simplificación: flujo de calor en la pared transversal (caso 1)	30
2.3.3 Segunda simplificación: pared térmicamente delgada (caso 0)-----	31
2.4 Comparación de los diferentes casos de estudio -----	32
2.4.1 Sistema de ecuaciones a resolver -----	32
2.4.2 Parámetros del sistema -----	32
2.4.3 Condiciones de contorno-----	33
2.5 Estudio del modelo numérico-----	35
3. Presentación y análisis de resultados-----	39
3.1 Análisis de resultados para el caso simplificado: flujo de calor transversal (caso 1)-----	39
3.1.1 Efecto de la pared en la eficiencia -----	40
3.1.2 Variación de la eficiencia con la longitud del intercambiador -----	50
3.1.3 Variación de la eficiencia manteniendo m constante-----	51

3.1.4 Variación de la eficiencia manteniendo κ constante-----	53
3.1.5 Variación de la eficiencia manteniendo el producto $m\kappa$ constante ----	56
3.1.6 Efectos de los parámetros numéricos en las simulaciones -----	59
3.2 Análisis de resultados para el caso general: flujo de calor transversal y longitudinal (caso 2)-----	60
3.2.1 Efecto de la transferencia de calor longitudinal en la eficiencia -----	61
3.2.2 Efecto de los parámetros numéricos en las simulaciones -----	65
4. Similitud del estudio realizado con datos de intercambiadores reales-----	68
5. Conclusiones-----	71
6. Bibliografía consultada, referencias y nomenclatura empleada -----	73
6.1 Bibliografía consultada -----	73
6.2 Referencias -----	73
6.3 Nomenclatura -----	74

1. Introducción teórica

1.1 Definición de intercambiador de calor

El proceso de intercambio de calor entre dos fluidos que están a diferentes temperaturas y separados por una pared sólida es necesario en muchas aplicaciones de ingeniería. Para poder llevar a cabo dicho proceso se emplea un dispositivo denominado **intercambiador de calor**.

Las aplicaciones del intercambiador de calor son bastante variadas, desde climatizar un área determinada (aplicaciones de calefacción y refrigeración) hasta procesos de producción de potencia y recuperación de calor de productos de desecho pasando por procesos de la industria química.

1.2 Clasificación de los intercambiadores de calor

Existe una gran variedad de intercambiadores de calor. Para poder conocer todos los tipos de intercambiadores que hay, vamos a dividir su clasificación en dos grandes tipos: en función de su geometría y en función de la dirección y sentido de los flujos que por él circulan.

1.2.1 Según su geometría

En función de la geometría que presente el intercambiador de calor podemos clasificarlos en cuatro grandes grupos:

- a) Intercambiadores de calor de tubos concéntricos: se trata de un tipo de intercambiador conformado por dos tubos huecos con forma cilíndrica concéntricos en el que el tubo de menor diámetro se encuentra situado en el interior del tubo de mayor diámetro. La pared del tubo de menor diámetro será la pared de intercambio, ya que por su interior circula uno de los dos fluidos y por el exterior, es decir, entre el tubo de menor diámetro y el tubo de mayor diámetro circula el otro fluido.

Este tipo de intercambiador de calor puede funcionar de dos maneras, con los fluidos circulando de manera paralela o circulando en contra corriente.

Un ejemplo de este tipo de intercambiador es el siguiente.



Figura 1: Intercambiador de calor de doble tubo

Generalmente, para aumentar el coeficiente global de transferencia de calor y mejorar la eficiencia se practica un surco de forma helicoidal sobre el tubo interno de tal forma que, al deformarlo, aumenta ligeramente el área de intercambio y genera un movimiento circular en ambos fluidos que aumenta el tiempo promedio de residencia de cada fluido en el intercambiador.

En la siguiente figura se puede observar el efecto de la deformación helicoidal realizada sobre el tubo interior:



Figura 2: Detalle del surco helicoidal en la pared de intercambio

- b) Intercambiadores de calor tubulares: a diferencia de los anteriores, este tipo de intercambiador de calor está constituido únicamente por una serie de tubos dispuestos paralelamente por los que circula un fluido. El segundo fluido circula por el exterior y generalmente lo hace de manera perpendicular a dichos tubos.

La disposición de los tubos es muy variada, tanto geométricamente como en la distancia a la que se sitúan unos de otros, afectando al coeficiente global de transferencia de calor. Sin embargo, una de las características que tiene este intercambiador de calor, y que también afecta significativamente al coeficiente global de transferencia de calor, es la posibilidad de llevar aletas o no llevarlas.

En este caso, llevar aletas o no llevarlas implica un gran cambio sobre el funcionamiento del intercambiador, ya que en función de si lleva aletas o no las lleva, el fluido exterior a los tubos puede mezclarse o no. En caso de llevar aletas, el fluido exterior a los tubos no puede mezclarse ya que tiene paredes (las aletas) que lo confinan. En caso de no llevar aletas, el fluido exterior a los tubos se mueve por cualquier lado sin ningún tipo de restricción.

Un uso para este tipo de intercambiadores se da en centrales de producción de potencia de tipo Rankine para bajar la temperatura del agua del ciclo, y para ello se emplea aire como fluido refrigerante, que puede estar impulsado además mecánicamente.

- c) Intercambiadores de calor tubo-carcasa: este tipo de intercambiadores es similar al anterior. Está formado por una gran cantidad de tubos por los que circula un fluido que se introducen en una carcasa, por cuyo interior circula el otro fluido. Al contener tantos tubos, hay que sujetarlos a la carcasa por medio de unas planchas agujereadas llamadas bafles. Estos bafles, además de proporcionar sujeción a los tubos aumentan el tiempo de residencia del fluido en el interior de la carcasa, haciendo que describa un recorrido en forma de "S".

El sentido de circulación de ambos fluidos puede ser, de manera local, de los tres tipos dentro de un mismo intercambiador: contracorriente, paralelo y perpendicular. Esta extraña situación se debe a la presencia de los bafles que desvían el fluido que circula por la carcasa y a la posibilidad de los tubos de realizar múltiples pasos en el interior de la carcasa, es decir, que gracias a la disposición de los tubos el fluido que por él circula puede ir y volver.

Un ejemplo de un intercambiador tubo-carcasa es el siguiente:

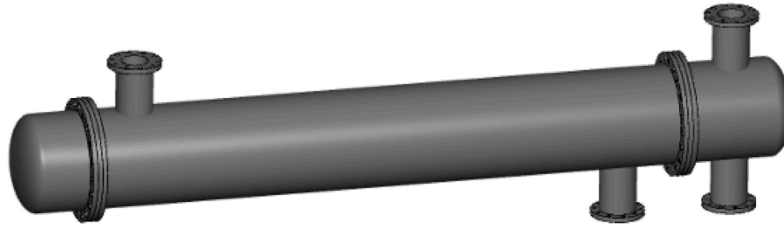


Figura 3: Intercambiador de calor de tubo-carcasa

En la siguiente figura se pueden ver los baffles y su disposición en el interior del cambiador:

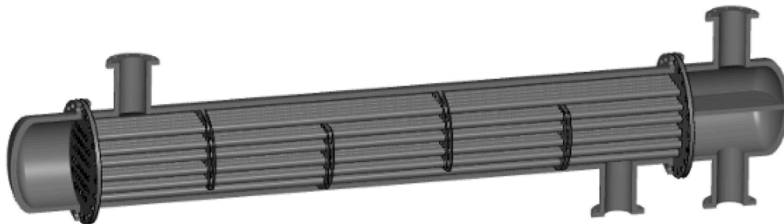


Figura 4: Intercambiador de calor de tubo-carcasa donde se aprecian los baffles

En este tipo de intercambiadores existe la posibilidad de que ocurra el fenómeno inverso al deseado a partir de una cierta temperatura denominada temperatura de cruce. Debido a los múltiples pasos de tubos que puede haber, es posible que el fluido de temperatura mayor (el que se enfría) y de temperatura menor (el que se calienta), crucen el valor de sus temperaturas. Esto quiere decir que, a partir de un cierto punto en el intercambiador, el fluido que tendría que enfriarse se calienta y viceversa, con lo que el flujo de calor se invierte, perdiendo así eficiencia. La solución a este tipo de fenómenos es incrementar el número de pasos por carcasa, de tal manera que este efecto no se produzca. El único inconveniente en este caso es que el intercambiador puede no caber físicamente en el espacio que para él fue reservado.

- d) Intercambiadores de calor de placas: este tipo de intercambiadores de calor cuenta con una serie de placas dispuestas paralelamente que confinan dos fluidos alternativamente. Suelen ser intercambiadores compactos y son de tamaño variable. Estos intercambiadores pueden trabajar tanto en flujo en paralelo como en contraflujo.

La siguiente figura muestra un ejemplo de la versatilidad y tamaños variados de los intercambiadores de calor de placas planas:



Figura 5: Intercambiadores de calor de placas planas

La siguiente figura ilustra el esquema de funcionamiento de este tipo de intercambiadores de calor:

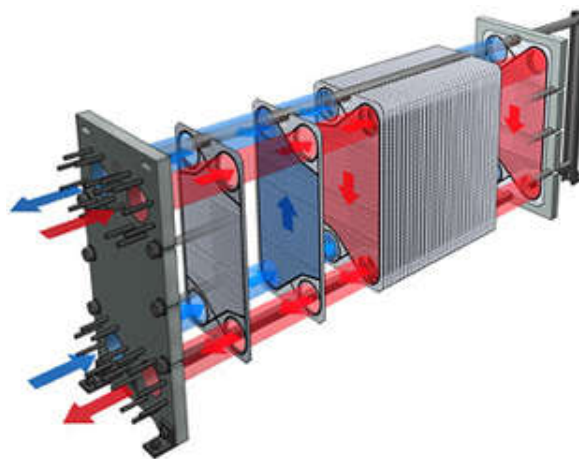


Figura 6: Esquema de funcionamiento de un intercambiador de calor de placas planas

Con el fin de aumentar la eficiencia del intercambiador, las placas que lo conforman presentan una corrugación en un ángulo determinado, aumentando así el recorrido que cada fluido debe realizar y aumentando el tiempo de residencia en el intercambiador. Además, gracias a esta corrugación aumenta significativamente el área de intercambio del intercambiador.

En la siguiente figura se puede ver una de las placas de intercambio y se puede observar la corrugación:

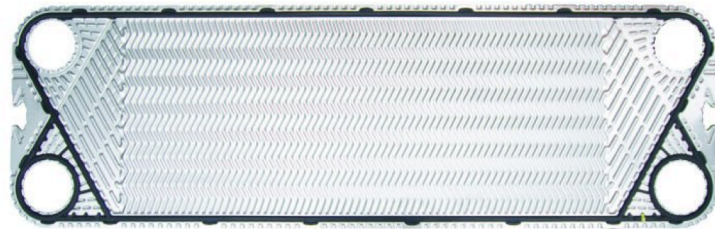


Figura 7: Detalle de una placa corrugada de un intercambiador de placas

Una característica de este tipo de intercambiadores es que pueden intercambiar calor entre más de 2 fluidos. Esto requiere un diseño ligeramente distinto al de los intercambiadores de la figura 5. En la siguiente figura se observa el diseño y el funcionamiento de un intercambiador de calor de placas planas en el que hay 3 fluidos de intercambio.

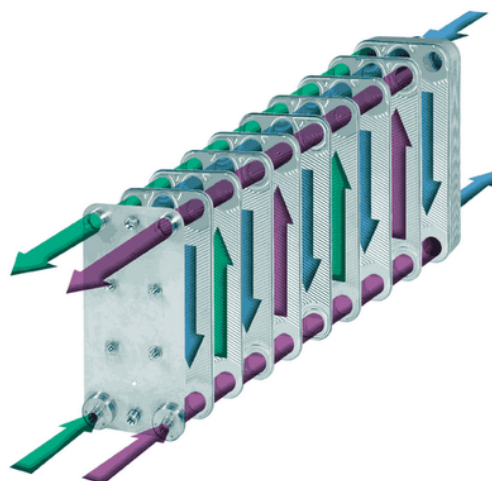


Figura 8: Intercambiador de calor de placas planas con 3 fluidos de intercambio

1.2.2 Según la dirección y sentido de los flujos

En función de la dirección y sentido de los flujos que circulan por el intercambiador de calor tenemos tres clasificaciones posibles:

- a) Flujo paralelo en la misma dirección o paralelo: es el tipo de flujo más sencillo que hay. Los dos fluidos entran en el intercambiador por la misma zona y avanzan en la misma dirección y sentido, paralelo a la pared de intercambio.

Con este tipo de intercambiadores no se consigue una eficiencia elevada, ya que a medida que los fluidos van avanzando, ambos se van acercando a una temperatura media a partir de la cual no se puede seguir transfiriendo calor.

El esquema de este tipo de cambiadores es el siguiente:

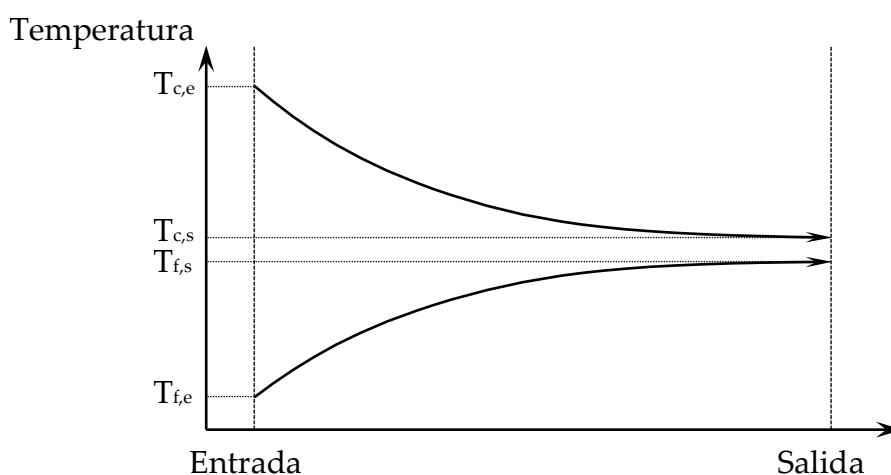


Figura 9: Esquema de la evolución de la temperatura a lo largo de un intercambiador de calor de flujo paralelo

- b) Flujo paralelo en direcciones opuestas o contracorriente: en este caso, el flujo entre los dos fluidos está contrapuesto. Cada fluido entra por un extremo del intercambiador y avanzan en sentidos opuestos. Con esta disposición se obtiene una mayor eficiencia de intercambio con la que se puede obtener una temperatura de salida del fluido frío superior a la temperatura de salida del fluido caliente. Esto es debido a que en cada sección del fluido se mantiene una diferencia de temperatura.

En comparativa con el caso anterior, hay mayor diferencia de temperatura entre la entrada y salida para ambos fluidos.

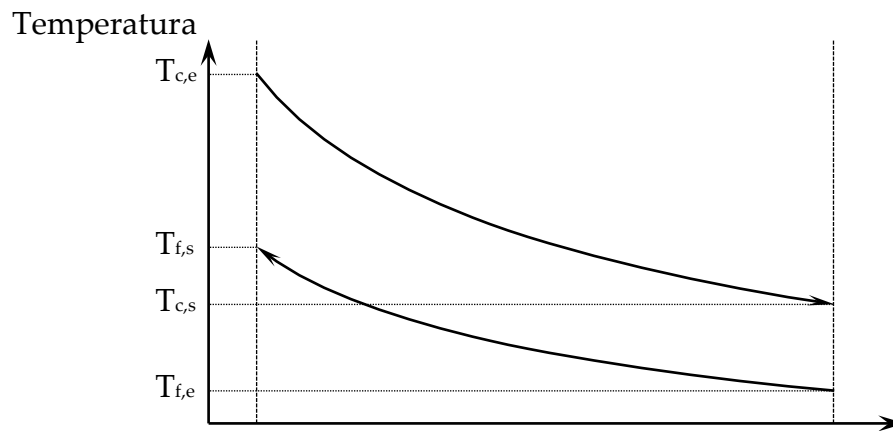


Figura 10: Esquema de la evolución de la temperatura a lo largo de un intercambiador de calor de flujos en contracorriente

- c) Flujo perpendicular o cruzado: en esta disposición uno de los dos fluidos circula por el interior de tubos mientras que el otro circula guiado o libre, en función de si los tubos contienen aletas o no, en dirección perpendicular a los mismos.

Este tipo de configuración se observa en intercambiadores agua-aire de centrales de producción de potencia para enfriar el agua de un ciclo Rankine, donde el agua circula por los tubos y el aire circula en perpendicular a ellos.



Figura 11: Intercambiador de calor de flujo cruzado agua-aire

1.3 Materiales empleados en la construcción de la pared de intercambio

Los materiales más comúnmente empleados en los intercambiadores de calor son los metales o aleaciones. La principal ventaja que tienen es su alta conductividad térmica, haciendo que sean ideales para la transferencia de calor, además de su elevado punto de fusión, permitiendo un gran rango de temperaturas de trabajo.

En la siguiente tabla se muestran algunos de los metales que se pueden emplear en intercambiadores de calor junto con sus respectivas conductividades térmicas:

Material	Composición	Conductividad térmica
Cobre		386 W/m K
Aluminio		202 W/m K
Latón rojo	85 Cu - 15 Zn	159 W/m K
Bronce de almirantazgo	71 Cu - 28 Zn - 1 Sn	111 W/m K
Aluminio de latón	76 Cu - 22 Zn - 2 Al	100 W/m K
Latón	70 Cu - 30 Zn	99 W/m K
Cuproníquel	90 Cu - 10 Ni	71 W/m K
Níquel		62 W/m K
Acero al carbono		45 W/m K
Acero Cromo-Molibdeno	1 Cr - 0.5 Mo	42 W/m K
Acero Cromo-Molibdeno	2 1/4 Cr - 0.5 Mo	38 W/m K
Plomo		35 W/m K
Acero Cromo-Molibdeno	5 Cr - 0.5 Mo	35 W/m K
Cuproníquel	70 Cu - 30 Ni	29 W/m K
Acero Cromo-Molibdeno	12 Cr - 1 Mo	28 W/m K
Titanio		19 W/m K
Acero Inoxidable - 316	17 Cr - 12 Ni - 2 Mo	16 W/m K
Acero Inoxidable - 304	18 Cr - 8 Ni	16 W/m K

Tabla 1: Algunos materiales de carácter metálico con sus conductividades térmicas

Sin embargo, estos materiales presentan dos grandes problemas. El primero es la dilatación térmica. Si los fluidos de trabajo están a una temperatura elevada los metales y los constituyentes del intercambiador van a cambiar su tamaño, generando así tensiones internas que pueden deteriorar la estructura del intercambiador y generar fugas. Debido a esto, la estructura del intercambiador tiene que dar cierta libertad de movimiento a los materiales para evitar este tipo de problemas.

Por otro lado, existe el problema de la corrosión, que se produce cuando las paredes de intercambio están en contacto con determinados fluidos, debido a su continuado funcionamiento. Esto acaba por generar fugas en el intercambiador y al final la única solución es eliminar la pieza defectuosa y sustituirla por una nueva.

Debido a estos dos grandes problemas, actualmente se están empleando nuevos materiales plásticos con los que se eliminan estos dos problemas (siempre que las temperaturas de intercambio no sean extremas). La contrapartida de emplear plásticos es su conductividad térmica, que es mucho menor que la de los metales.

En la tabla adjunta se muestran algunos ejemplos de materiales plásticos con su conductividad térmica.

Material	Abreviatura	Conductividad térmica
Polietileno de alta densidad	HDPE	0.50 W/m K
Polietileno de baja densidad	LDPE	0.33 W/m K
Nylon		0.25 W/m K
Teflón	PTFE	0.25 W/m K
Fibra de vidrio epoxi		0.23 W/m K
Acrílico	PBAA	0.20 W/m K
Cloruro de polivinilo	PVC	0.19 W/m K
Epoxi		0.17 W/m K

Tabla 2: Algunos materiales plásticos con sus conductividades térmicas

Con este tipo de materiales será con los que obtendremos los valores de menor eficiencia en los estudios realizados a lo largo de este proyecto.

2. Desarrollo teórico

2.1 Resumen del estudio a realizar

El objetivo de este proyecto es el estudio de la eficiencia de un intercambiador de calor al variar las limitaciones de su pared de intercambio. Para ello realizaremos una formulación general del sistema y a partir de esta formulación realizaremos simplificaciones para obtener los distintos casos que se exponen a continuación:

Caso 0: Intercambiador de calor bidimensional de placas planas térmicamente delgadas. Éste es el caso más simple de los tres a resolver y que ya está resuelto. Este caso se emplea como caso de referencia.

Caso 1: Intercambiador de calor bidimensional de placas planas con un espesor y conductividad térmica finitos. A este caso llegaremos al realizar una pequeña simplificación del caso más general.

Caso 2: Intercambiador de calor bidimensional de placas planas con un espesor y conductividad térmica finitos al que permitimos transferencia de calor en la pared de intercambio tanto de manera longitudinal como de manera transversal.

Para resolver todos los casos emplearemos un código de MATLAB (proporcionado que resuelve el caso 0) al que realizaremos las modificaciones necesarias para que cumpla la formulación más general y poder resolver cualquier intercambiador (dentro de nuestro ámbito de estudio).

2.2 Desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso general

Como comentamos en el apartado anterior, vamos a explicar con detalle el desarrollo de nuestro caso más general para después llegar a los casos simplificados. Para ello partiremos de las ecuaciones de Navier-Stokes que se aplican sobre el intercambiador cuyo esquema se muestra en la figura 12. Como se puede observar, se trata de un intercambiador de calor de placas planas con flujos en contracorriente. Gracias a la simetría del problema, podemos dividir cada canal por su plano de simetría y considerar únicamente una de las mitades. Esto quiere decir que para el flujo i el ancho del canal sería $2a_i$.

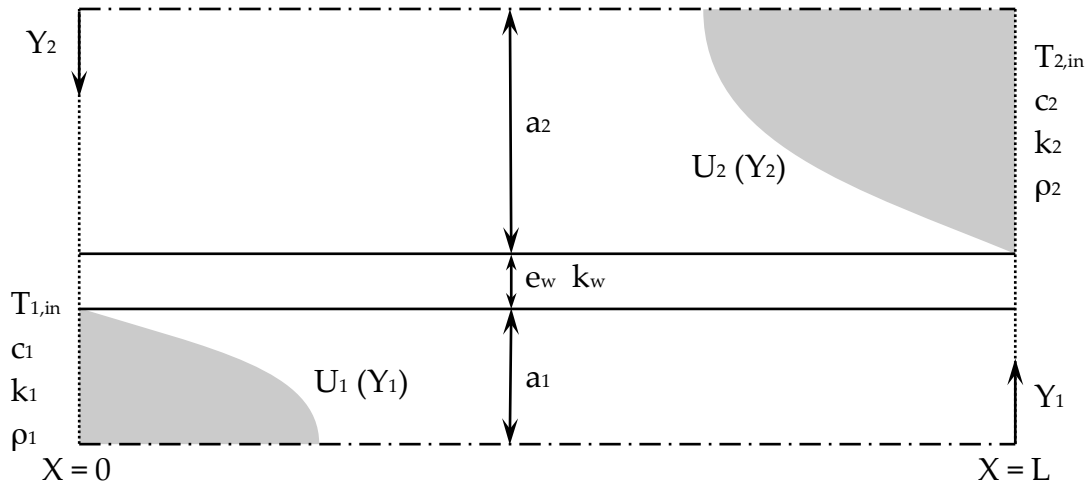


Figura 12: Representación esquemática del problema considerado. Los planos $Y_i = 0$ representan los planos de simetría de los canales

El esquema que vamos a seguir para este desarrollo es el siguiente:

- 1) En primer lugar enunciaremos las hipótesis que rigen nuestro sistema de ecuaciones.
- 2) Seguidamente realizaremos un estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener un sistema de ecuaciones simplificado que permita resolver nuestro intercambiador.
- 3) Por último añadiremos las condiciones de contorno necesarias para completar el sistema y así poder resolverlo satisfactoriamente.

2.2.1 Hipótesis realizadas

Estudiaremos el intercambiador de calor bajo las siguientes hipótesis:

- 1) $Re_i < Re_{critico}$ (flujo laminar)
- 2) Flujos completamente desarrollados con perfil de Poiseuille (según X)
- 3) $Pe_i = Re_i \cdot Pr_i \gg 1$
- 4) Régimen estacionario
- 5) Supondremos propiedades del fluido constantes a lo largo del intercambiador e independientes de la temperatura

Como vemos más abajo, como consecuencia de la hipótesis 3 despreciaremos el flujo de calor longitudinal en los fluidos.

2.2.2 Análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes

Los parámetros del intercambiador de calor indicados anteriormente se definen de la siguiente manera:

$$U_i(Y_i) = (-1)^{i+1} \frac{3}{2} V_i \left[1 - \left(Y_i/a_i \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$Re_i = \frac{2a_i V_i \rho_i}{\mu_i} \quad Pr_i = \frac{\mu_i}{\rho_i \alpha_i} \quad Pe_i = Re_i Pr_i = \frac{2a_i V_i}{\alpha_i}$$

Donde:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \equiv \text{Difusividad térmica del fluido } i$$

$V_i \equiv$ Velocidad promedio del fluido i basada en el caudal

Bajo estas hipótesis y con el diseño anterior realizamos el análisis de la ecuación de la energía (las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento nos llevan al resultado de la distribución de Poiseuille (1)):

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial X} + v_y \frac{\partial T}{\partial Y} + v_z \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \phi_v + k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] + Q_r + Q_q \quad (2)$$

En esta ecuación ϕ_v representa el término de disipación viscosa, mientras que Q_r y Q_q son los calores aportados por radiación y reacción química, que aquí supondremos nulos. Con las hipótesis realizadas y dada la geometría del problema sabemos que se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial Z} = 0 \quad v_y = v_z = 0 \quad Q_r = Q_q = 0 \quad (3)$$

Con lo que la ecuación de la energía (2) simplificada a nuestro problema queda:

$$\rho c \left(v_x \frac{\partial T}{\partial X} \right) = 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial Y} \right)^2 + k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right] \quad (4)$$

Para poder trabajar con esta ecuación debemos simplificarla realizando un análisis de órdenes de magnitud. Para ello definimos los siguientes órdenes de magnitud para las variables y términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \rho_{carac} &\sim \rho_i & c_{carac} &\sim c_i & Y_{carac} &\sim a_i \\ v_{carac} &\sim V_i & k_{carac} &\sim k_i & T_{carac} &\sim \theta \end{aligned}$$

Realizando análisis de órdenes de magnitud obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{\mathcal{O} \left(\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial X} \right)}{\mathcal{O} \left(k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right)} \sim \frac{\rho_i c_i V_i \frac{\Delta \theta}{X_{carac}}}{k_i \frac{\Delta \theta}{a_i^2}} \sim \frac{\rho_i c_i V_i a_i^2}{k_i X_{carac}} \sim \frac{Pe_i a_i}{X_{carac}} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad X_{carac} \sim Pe_i a_i \quad (5)$$

Nótese que debemos forzar que ambos términos sean del mismo orden para que la conducción transversal sea importante en el intercambiador, y de esta manera obtener una distancia longitudinal característica.

Continuamos con los análisis de órdenes de magnitud comparando los términos de conducción longitudinal y transversal:

$$\frac{\mathcal{O} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right)}{\mathcal{O} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right)} \sim \frac{\frac{\Delta \theta}{(Pe_i a_i)^2}}{\frac{\Delta \theta}{a_i^2}} \sim Pe_i^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \quad (6)$$

Este resultado lo hemos obtenido gracias a la hipótesis de que el Pe tiene que ser mucho mayor que la unidad.

Finalmente comparamos el término de disipación viscosa con el término convectivo:

$$\frac{\mathcal{O}\left(2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial Y}\right)^2\right)}{\mathcal{O}\left(\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial X}\right)} \sim \frac{\mu_i \frac{V_i^2}{a_i^2}}{\rho_i c_i V_i \frac{\Delta\theta}{X_{carac}}} \sim \frac{Pr_i V_i^2 / c_i}{\Delta\theta} \quad (7)$$

Para evaluar el orden de magnitud de esta relación daremos valores típicos para fluidos que pueden trabajar bajo las hipótesis de nuestro intercambiador. Esos valores típicos, obtenidos para el caso de agua, son:

$$Pr_i \sim 5 \quad V_i \sim 1 \text{ m/s} \quad c_i \sim 4180 \text{ J/kg K} \quad \Delta\theta \sim 10 \text{ K}$$

Introduciendo los valores anteriores en la expresión (7) obtenemos un valor para la relación de órdenes de magnitud entre el término de disipación viscosa y el término convectivo:

$$\frac{\mathcal{O}\left(2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial Y}\right)^2\right)}{\mathcal{O}\left(\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial X}\right)} \sim \frac{Pr_i V_i^2 / c_i}{\Delta\theta} \sim \frac{1}{8360} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial Y}\right)^2 \ll \rho c v_x \frac{\partial T}{\partial X} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta el análisis de órdenes de magnitud, resultados (6) y (8), e introduciéndolos en la ecuación de la energía simplificada para nuestro intercambiador (4) obtenemos la expresión dimensional final que rige el comportamiento del intercambiador:

$$\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial X} = k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \quad (9)$$

Para trabajar mejor con esta ecuación, definimos las siguientes variables adimensionales, particularizadas para cada uno de los fluidos de trabajo:

$$\xi = \frac{X}{Pe_1 a_1} \quad y_i = \frac{Y_i}{a_i} \quad \theta_i = \frac{T_i - T_{1,in}}{T_{2,in} - T_{1,in}} \quad (10)$$

Donde $T_{i,in}$ representa la temperatura de entrada del fluido i , que supondremos uniforme.

Introduciendo las variables adimensionales (10) y utilizando la definición del flujo de Poiseuille (1) en la ecuación dimensional de la energía (9) llegamos a la siguiente expresión adimensionalizada para el fluido i :

$$\frac{(-1)^{i+1} Pe_i a_i}{Pe_1 a_1} \frac{3}{4} [1 - y_i^2] \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y_i^2} \quad (11)$$

Que una vez particularizada para cada fluido proporciona las siguientes ecuaciones:

Fluido 1 ($i = 1$):

$$\frac{3}{4} [1 - y_1^2] \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2} \quad \text{en} \quad 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_1 < 1 \quad (12)$$

Fluido 2 ($i = 2$):

$$-m \frac{3}{4} [1 - y_2^2] \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y_2^2} \quad \text{en} \quad 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_2 < 1 \quad (13)$$

Donde aparecen los parámetros adimensionales de orden unidad:

$$m = \frac{Pe_2 a_2}{Pe_1 a_1} \equiv \text{Relación adimensional de números de Peclet}$$

$$\xi_L = \frac{L}{Pe_1 a_1} \equiv \text{Longitud adimensional del intercambiador de calor}$$

2.2.3 Condiciones de contorno

Una vez obtenidas las expresiones de las ecuaciones que gobiernan el flujo de energía para cada uno de los dos fluidos, definimos las condiciones de contorno y de acoplamiento térmico en la pared para poder resolver el sistema:

- a) Simetría: en el plano de simetría de cada uno de los canales del intercambiador el flujo transversal de calor debe ser nulo:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial Y_1} \right|_{Y_1=0} = \left. \frac{\partial T_2}{\partial Y_2} \right|_{Y_2=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 0 \quad (14)$$

- b) Salto térmico en la pared: debido al espesor de la pared (e_w) y a su conductividad térmica (k_w), habrá un salto térmico entre las dos superficies de dicha pared.

$$T_{2w} = T_{1w} + \Delta T \quad \Rightarrow \quad \theta_{2w} = \theta_{1w} + \Delta \theta \quad (15)$$

La expresión para el salto térmico se obtiene realizando un promedio entre el flujo de calor transversal que pasa del fluido 2 a la pared (v_{2w}) y de la pared al fluido 1 (v_{1w}) en una cierta estación X , e igualando el resultado al flujo de calor transversal en la pared correspondiente al salto térmico ΔT (v_w):

$$\begin{aligned} v_w &= k_w \frac{\Delta T}{e_w} \quad v_{1w} = k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial Y_1} \right|_{Y_1=a_1} \quad v_{2w} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial Y_2} \right|_{Y_2=a_2} \\ v_w &= \frac{1}{2} (v_{1w} + v_{2w}) \quad \Rightarrow \quad k_w \frac{\Delta T}{e_w} = \frac{1}{2} \left(k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial Y_1} \right|_{Y_1=a_1} - k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial Y_2} \right|_{Y_2=a_2} \right) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \Delta \theta = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} - \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Donde

$$\kappa = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2} \equiv \text{Relación de conductividades 2 a 1 adimensional}$$

$$\kappa_w = \frac{k_w a_1}{k_1 e_w} \equiv \text{Relación de conductividades w a 1 adimensional}$$

En resumen, la condición de salto térmico, combinando las ecuaciones (15) y (16) queda:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} - \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \right) \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (17)$$

Conviene advertir que el signo menos que aparece en el término del flujo de calor que pasa del fluido 2 a la pared viene determinado por el sentido de los ejes verticales, que están dirigidos ambos hacia la pared y por tanto están contrapuestos.

- c) Salto de flujos de calor en la pared: Como veremos más abajo, en determinados casos el flujo de calor longitudinal en la pared puede jugar un papel importante, en cuyo caso los flujos de calor transversales que pasan del fluido 2 a la pared y de la pared al fluido 1 en una cierta estación X no tienen por qué coincidir.

En la siguiente figura se muestra un esquema de la transferencia de calor a través de la pared en una cierto punto X :

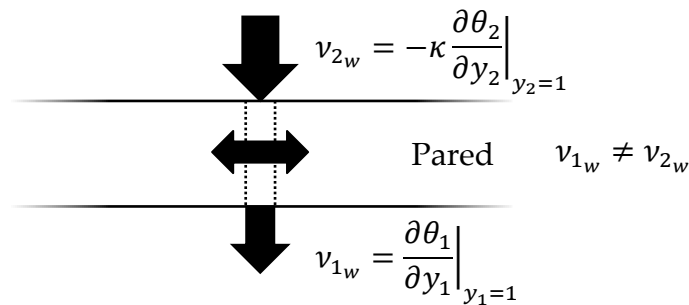


Figura 13: Esquema del flujo de calor en la pared para el caso 2

La condición de salto en este caso viene dada por:

$$\begin{aligned}
 k_2 \frac{\partial T_2}{\partial Y_2} \Big|_{Y_2=a_2} + k_1 \frac{\partial T_1}{\partial Y_1} \Big|_{Y_1=a_2} &= e_w k_w \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial X^2} \Big|_{Y_1=a_1} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2} \Big|_{Y_2=a_2} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} + \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} &= \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \Big|_{y_1=1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \Big|_{y_2=1} \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Donde

$$\delta_w = \frac{e_w}{a_1} \equiv \text{Espesor adimensional de la pared}$$

De modo que la condición de salto de flujos de calor queda:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} + \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} = \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \Big|_{y_1=1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \Big|_{y_2=1} \right) \text{ en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (19)$$

- d) Temperatura de entrada al intercambiador: Como vimos más arriba, debido a la hipótesis de que el número de Peclet de ambos fluidos es mucho mayor que la unidad el efecto de los términos de conducción axial resulta despreciable en los fluidos. Gracias a esto, es posible imponer la temperatura de ambos fluidos en las secciones de entrada, que supondremos uniforme en ambos casos:

$$T_1 = T_{1,in} \Rightarrow \theta_1 = 0 \text{ en } \xi = 0 \quad 0 \leq y_1 \leq 1 \quad (20)$$

$$T_2 = T_{2,in} \Rightarrow \theta_2 = 1 \text{ en } \xi = \xi_L \quad 0 \leq y_2 \leq 1 \quad (21)$$

Con estas condiciones de contorno queda completamente cerrado y definido el problema general que vamos a resolver.

Añadimos que el cálculo de la temperatura de salida para cada uno de los fluidos se hará extrapolando los resultados del punto computacional anterior a la salida.

2.2.4 Resumen

El sistema adimensionalizado final a resolver es el siguiente:

$$\frac{3}{4}[1 - y_1^2] \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2} \quad \text{en } 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_1 < 1 \quad (12)$$

$$-m \frac{3}{4}[1 - y_2^2] \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y_2^2} \quad \text{en } 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_1 < 1 \quad (13)$$

C. C. de simetría:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = 0 \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 0 \quad (14)$$

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} - \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (17)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} + \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} = \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \right|_{y_1=1} + \left. \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \right|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (19)$$

C. C. de entrada del fluido 1:

$$T_1 = T_{1,in} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0 \quad \text{en } \xi = 0 \quad 0 \leq y_1 \leq 1 \quad (20)$$

C. C. de entrada del fluido 2:

$$T_2 = T_{2,in} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 1 \quad \text{en } \xi = \xi_L \quad 0 \leq y_2 \leq 1 \quad (21)$$

Problema que depende de los siguientes parámetros adimensionales de orden unidad:

$$m = \frac{Pe_2 a_2}{Pe_1 a_1}, \quad \kappa = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}, \quad \kappa_w = \frac{k_w a_1}{k_1 e_w}, \quad \delta_w = \frac{e_w}{a_1}, \quad \xi_L = \frac{L}{Pe_1 a_1}$$

Conviene hacer notar que el producto de los parámetros m y κ constituye un parámetro adimensional de gran relevancia en el diseño de cambiadores de calor en contracorriente. Para ello basta expresar dicho producto en la forma:

$$m\kappa = \frac{Pe_2 k_2}{Pe_1 k_1} = \frac{\dot{m}_2 c_2}{\dot{m}_1 c_1} \quad \text{con} \quad \dot{m}_i = 2a_i V_i \rho_i \equiv \text{Gasto másico del fluido } i$$

Que representa el cociente de flujos de capacidades caloríficas. En lo que sigue restringiremos nuestro análisis al caso $m\kappa \geq 1$, para el cual el fluido 2 es el de mayor flujo de capacidad calorífica. En este caso, la temperatura de mezcla del fluido 1 en la sección de salida coincide precisamente con la eficiencia ϵ del intercambiador.

2.3 Simplificaciones del sistema

A continuación vamos a realizar una serie de simplificaciones que nos van a permitir modificar algunas de las condiciones introducidas en el problema general.

Comenzaremos obteniendo las condiciones que se cumplen para el caso más general y realizaremos y explicaremos las modificaciones necesarias para convertir dichas condiciones en las nuevas condiciones para los casos simplificados.

2.3.1 Flujo de calor en la pared transversal y longitudinal (caso 2)

Como hemos comentado, vamos a comenzar deduciendo las condiciones que hacen que este sistema sea el general. Para ello analizaremos las condiciones de contorno de la pared: salto térmico y flujo de calor.

Analizaremos primero la condición de contorno de salto térmico, que nos da una condición bastante simple y directa. La condición de contorno de salto térmico es:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} - \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (17)$$

Como se puede observar de esta condición de contorno, hay un parámetro que es el que domina esta ecuación, κ_w , o mejor dicho, su inverso.

La condición que podemos obtener del análisis directo de esta condición de contorno es que para que haya salto térmico se tiene que cumplir que:

$$\frac{1}{\kappa_w} \lesssim 1 \quad (22)$$

Debido a imposiciones de materiales y constructivas del propio intercambiador, el inverso del parámetro κ_w nunca será mayor que la unidad, por lo que la condición directamente impide que se tomen valores mayores.

En segundo lugar vamos a analizar la condición de contorno de flujos de calor en la pared, de la cual vamos a obtener una condición, que adelantamos que va a ser una longitud característica del intercambiador, que no es tan evidente como la anterior.

La condición de contorno del salto de flujos de calor en la pared es la siguiente:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} + \kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} = \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \right|_{y_1=1} + \left. \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \right|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (19)$$

Vamos a realizar un análisis de órdenes de magnitud entre los términos de flujo de calor transversal y longitudinal. Igualando los órdenes de ambos términos, obtendremos la longitud característica ξ_c a partir de la cual los efectos de transferencia longitudinal de la pared son importantes.

Para ello vamos a emplear unos resultados, (23) y (24), que provienen de un estudio realizado sobre los efectos de entrada y su evolución [1].

Dicho estudio ha sido realizado para pared térmicamente delgada, mientras que el estudio que estamos realizando no contempla que la pared de intercambio tenga ese comportamiento. A pesar de ello, los resultados que obtendremos serán válidos ya que únicamente nos interesa el valor límite de ξ_c , es decir, el límite a partir del cual los resultados (23) y (24) dejan de ser válidos.

Los resultados que vamos a emplear son los siguientes:

$$\theta_w(\xi) = \Theta_0 \xi^j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = \Theta_0 j(j-1) \xi^{j-2} \quad \text{donde} \quad j = f(m^{1/3} \kappa) \quad (23)$$

$$v_w(\xi) = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \Theta_0 \alpha(j) \xi^{j-\frac{1}{3}} \quad \text{donde} \quad \alpha(j) = g(j) \quad (24)$$

Realizando el análisis de órdenes de magnitud, igualando ambos términos de la ecuación e introduciendo los resultados (23) y (24), obtenemos la siguiente expresión para la longitud característica ξ_c .

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}\left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}\right)}{\mathcal{O}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)} \sim 1 & \Rightarrow \Theta_0 \alpha(j) \xi_c^{j-\frac{1}{3}} \sim \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \Theta_0 j(j-1) \xi_c^{j-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi_c & \sim \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \quad \text{con} \quad 0 < j < \frac{1}{3} \quad \alpha(j) \approx 0.7 \end{aligned} \quad (25)$$

Teniendo este resultado, la condición que se tiene que cumplir para que la condición de contorno tenga esta expresión es:

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \lesssim 1 \quad (26)$$

Estas dos condiciones, (22) y (26), que acabamos de obtener para el caso general son las que vamos a ir variando para obtener simplificaciones de nuestro problema.

2.3.2 Primera simplificación: flujo de calor en la pared transversal (caso 1)

En esta primera simplificación vamos a limitar el flujo de calor a través de la pared a flujo exclusivamente vertical. Vamos a pasar del esquema representado en la figura 13, al siguiente esquema:

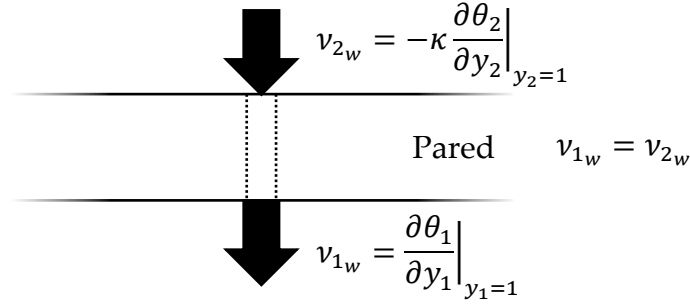


Figura 14: Esquema del flujo de calor en la pared para el caso 1

Para llevar a cabo este cambio en la pared es necesario imponer unos cambios en las condiciones obtenidas anteriormente.

Debido a que no hemos realizado ningún cambio en el salto térmico de la pared la condición para esa condición de contorno se mantiene invariante:

$$\frac{1}{\kappa_w} \lesssim 1 \quad (27)$$

Sin embargo, ahora la condición que rige la condición de contorno del flujo en la pared del intercambiador varía. Ahora imponemos que la longitud característica relativa ξ_c/ξ_L a la que se aprecian los efectos de transferencia longitudinal tiene que ser despreciable, es decir:

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \ll 1 \quad (28)$$

Con estos cambios, las nuevas condiciones de contorno se ven afectadas y su nueva expresión, para salto térmico en la pared y para salto de flujo de calor en la pared, es la siguiente:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} = -\kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (30)$$

Aunque la condición para el salto térmico no ha variado, su expresión en la condición de contorno si lo ha hecho. Esto se debe a que hemos aplicado la nueva condición (30) a la condición ya existente (17) cuya física no varía en esta simplificación, adoptando ésta la forma más sencilla (29).

Una vez más, indicar que el signo negativo en los flujos de calor se debe a que los sentidos de los ejes verticales están dirigidos ambos hacia la pared.

2.3.3 Segunda simplificación: pared térmicamente delgada (caso 0)

Realizar esta segunda simplificación implica llegar a los resultados empleados como referencia para nuestro estudio. Dicha simplificación impone una pared térmicamente delgada. Esto se traduce en que las condiciones obtenidas vuelven a cambiar.

La condición para el salto térmico ahora si se ve afectada. La imposición de pared térmicamente delgada obliga directamente a que se cumpla:

$$\frac{1}{\kappa_w} \rightarrow 0 \quad (31)$$

Por otro lado, la condición para los flujos de calor en la pared varía respecto del caso general pero se mantiene igual respecto de la simplificación anterior. El valor de la longitud característica relativa ξ_c/ξ_L debe de seguir siendo despreciable:

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \ll 1 \quad (32)$$

Con estas variaciones, nuestras nuevas condiciones de contorno para el salto térmico y el flujo de calor respectivamente quedan de la siguiente manera:

$$\theta_{1_w} = \theta_{2_w} = \theta_w \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} = -\kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (34)$$

Observamos que ahora la condición de salto térmico ha variado ya que en este nuevo caso imponemos que la temperatura en los dos lados de la pared es la misma. Sin embargo, la variación en la expresión del salto térmico no induce variaciones en la expresión de los flujos, como ocurría en el caso anterior.

2.4 Comparación de los diferentes casos de estudio

2.4.1 Sistema de ecuaciones a resolver

El sistema a resolver en cada uno de los tres casos es el mismo, permanece invariante.

$$\frac{3}{4} [1 - y_1^2] \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2} \quad \text{en} \quad 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_1 < 1 \quad (12)$$

$$-m \frac{3}{4} [1 - y_2^2] \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y_2^2} \quad \text{en} \quad 0 < \xi < \xi_L \quad 0 < y_1 < 1 \quad (13)$$

2.4.2 Parámetros del sistema

En cuanto a los parámetros del sistema, es interesante ver cómo en función de la simplificación realizada se va reduciendo el número de parámetros con los que cuenta el sistema.

En la siguiente tabla, se muestra una relación del número de parámetros necesarios en función del caso de estudio:

Caso 0	Caso 1	Caso 2
$m = \frac{Pe_2 a_2}{Pe_1 a_1}$	$m = \frac{Pe_2 a_2}{Pe_1 a_1}$	$m = \frac{Pe_2 a_2}{Pe_1 a_1}$
$\kappa = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}$	$\kappa = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}$	$\kappa = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}$
---	$\kappa_w = \frac{k_w a_1}{k_1 e_w}$	$\kappa_w = \frac{k_w a_1}{k_1 e_w}$
---	---	$\delta_w = \frac{e_w}{a_1}$
$\xi_L = \frac{L}{Pe_1 a_1}$	$\xi_L = \frac{L}{Pe_1 a_1}$	$\xi_L = \frac{L}{Pe_1 a_1}$

Tabla 3: Comparativa de los parámetros necesarios en función de cada caso

2.4.3 Condiciones de contorno

Como ya hemos comentado anteriormente, debido a que las simplificaciones se realizan únicamente en la pared de intercambio, las condiciones que no se refieren a la pared permanecen invariantes:

C. C. de simetría:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=0} = 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 0 \quad (14)$$

C. C. de entrada del fluido 1:

$$T_1 = T_{1,in} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 0 \quad 0 \leq y_1 \leq 1 \quad (20)$$

C. C. de entrada del fluido 2:

$$T_2 = T_{2,in} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 1 \quad \text{en} \quad \xi = \xi_L \quad 0 \leq y_2 \leq 1 \quad (21)$$

No obstante, en función del caso de estudio que estemos realizando, tenemos unas condiciones de contorno u otras, rigiéndose por las condiciones correspondientes a cada uno de los casos de estudio:

Caso 0 (referencia): pared térmicamente delgada

Condiciones:

$$\frac{1}{\kappa_w} \rightarrow 0 \quad (31)$$

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \ll 1 \quad (32)$$

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{1_w} = \theta_{2_w} = \theta_w \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (33)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} = -\kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (34)$$

Caso 1: flujo de calor transversal

Condiciones:

$$\frac{1}{\kappa_w} \lesssim 1 \quad (27)$$

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \ll 1 \quad (28)$$

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{2_w} - \theta_{1_w} = \frac{1}{\kappa_w} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (29)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=1} = -\kappa \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \right|_{y_2=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (30)$$

Caso 2: Flujo de calor transversal y longitudinal

Condiciones:

$$\frac{1}{\kappa_w} \lesssim 1 \quad (22)$$

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \lesssim 1 \quad (26)$$

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{2_w} - \theta_{1_w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} - \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (17)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} + \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} = \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \Big|_{y_1=1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \Big|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (19)$$

2.5 Estudio del modelo numérico

Una vez obtenidas todas las ecuaciones (junto con sus condiciones de contorno) que rigen nuestros tres casos de estudio es interesante hablar del modelo numérico empleado para resolver el sistema de ecuaciones.

Como ya comentamos, el sistema de ecuaciones lo vamos a implementar en **MATLAB** (Matrix Laboratory). El código está implementado empleando **diferencias finitas centradas**, con un error de truncamiento de orden 2 ($\mathcal{O}(\Delta\chi^2)$ y $\mathcal{O}(\Delta\eta^2)$, donde χ y η son las variables numéricas de resolución, explicadas posteriormente). Para las zonas límites de la malla, es decir, entrada, salida y pared de contacto, hemos empleado diferencias finitas descentradas pero que tienen el mismo error de truncamiento, para ser consistentes con la discretización empleada a lo largo de todo el código.

El método de solución implementado está basado en un avance pseudo-tiempo acelerada con un *local time stepping*, y empleando una condición CFL local para evitar inestabilidades hasta alcanzar el estacionario.

Debido a la alta importancia de las zonas de entrada y salida del fluido tanto como de la zona en contacto con la pared de intercambio, es necesario realizar un mallado no uniforme del intercambiador, con objeto de que en estas zonas el mallado sea más fino y poder realizar así con más exactitud los cálculos.

El efecto de este mallado se puede obtener de dos formas distintas:

- a) Realizar un mallado físico no uniforme implementando la no uniformidad directamente en la discretización de las ecuaciones y de las condiciones de contorno (costoso computacionalmente debido a los incrementos variables empleados en la discretización).
- b) Realizar un cambio de variable sobre el sistema de ecuaciones y condiciones de contorno, generando un mallado numérico uniforme equivalente al mallado físico no uniforme (complicando ligeramente las ecuaciones a discretizar ya que se añaden términos pero aliviando el coste computacional del sistema).

Un esquema del mallado físico que queremos obtener es el siguiente:

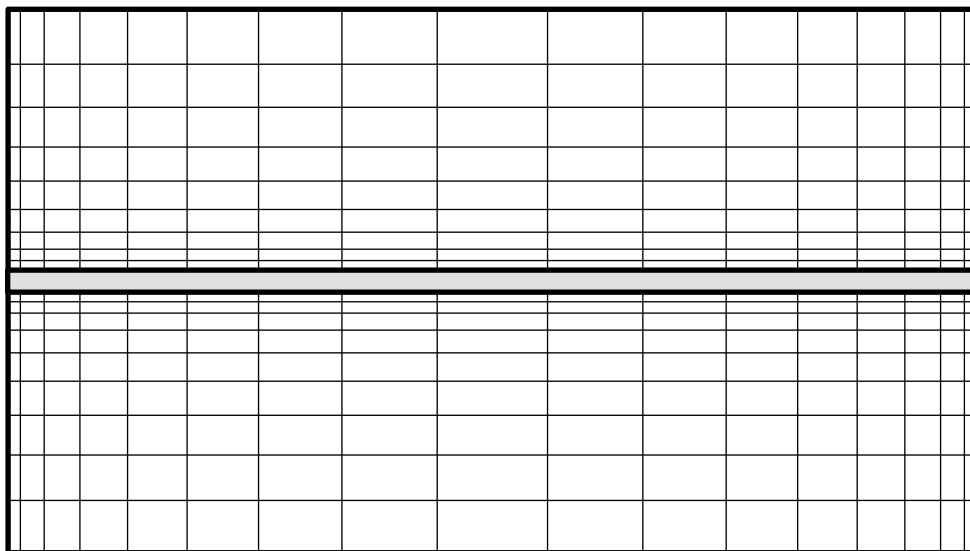


Figura 15: Esquema del mallado físico que se va a realizar para resolver numéricamente el sistema

Entre estas dos opciones se escogió la segunda ya que alivia el coste computacional asociado a la resolución del sistema, que ya por sí solo es bastante alto.

Dicho cambio de variable es el que se explica a continuación:

- a) Variable transversal a la pared (Y): Partimos de las ecuaciones expresadas en la variable adimensional y_i que vamos a transformar con el cambio que se expone a continuación en la variable adimensional η_i .

$$y_i = \frac{e^{\alpha\eta_i} - 1}{e^{\alpha} - 1} \quad (35)$$

Este cambio de variable, que depende del parámetro α , nos proporciona un mallado más fino en la pared de intercambio y un mallado más grueso en la zona de simetría del cambiador, cuando el valor de α es negativo (en nuestro caso $\alpha = -2$). De ser positivo dicho valor, el mallado sería más fino en la zona de simetría mientras que sería grueso en la pared de intercambio.

- b) Variable longitudinal a la pared (X): Para este caso partimos de las ecuaciones expresadas en la variable adimensional ξ que vamos a transformar en la variable adimensional χ con el cambio de variable siguiente:

$$\xi = \xi_L \left[\frac{a}{2} (1 - \cos(\pi\chi)) + (1 - a)\chi \right] \quad (36)$$

Este cambio de variable depende del parámetro a que en función del valor que tome proporciona un mallado uniforme (tomando el valor 0) o un mallado no uniforme fino en la entrada y salida del cambiador y grueso en el centro (tomando el valor 1, como será nuestro caso durante la realización del proyecto).

NOTA: El cambio de variable empleado ha sido diseñado por el director del proyecto e implementado por él mismo en el código original empleado como base comparativa en este estudio.

En cuanto a los tamaños típicos de malla empleados, se ha empleado una malla de 128×128 divisiones (129×129 número de nodos), siendo necesario deformarla en alguna simulación, como comentaremos más adelante.

En cuanto al número de iteraciones para resolver cada caso se emplean, en promedio, cuatro millones de iteraciones, implicando un tiempo aproximado de un hora por simulación (para un ordenador con un procesador potente), para las simulaciones con un mallado como el descrito para el caso típico.

Los valores extremos del número de iteraciones van desde poco más de un millón (con una duración aproximada de convergencia de 30 minutos) hasta los dieciocho millones y medio de iteraciones (siendo éste un caso muy crítico con una malla tremendamente deformada y empleando cerca de veinticuatro horas en converger).

3. Presentación y análisis de resultados

Una vez implementadas las ecuaciones y las condiciones de contorno para nuestro intercambiador de calor, procedemos a realizar las distintas simulaciones para obtener los resultados que presentaremos a continuación.

Debido a que es un proceso iterativo, supondremos una solución inicial y comenzaremos a realizar cálculos hasta que las sucesivas iteraciones converjan en un único resultado.

Dejaremos de realizar iteraciones cuando el error cometido sea inferior al error máximo que estamos dispuestos a aceptar en nuestros cálculos. Dicho error lo calcularemos como la máxima variación que haya de una iteración a la siguiente en cualquiera de los puntos de cálculo, y tiene que ser menor que 10^{-5} .

3.1 Análisis de resultados para el caso simplificado: flujo de calor transversal (caso 1)

Para este caso hemos empleado las siguientes condiciones de contorno en la pared sobre el salto térmico y salto de flujos de calor:

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (29)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} = -\kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} \quad \text{en} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (30)$$

A continuación vamos a exponer los resultados de los estudios realizados, así como comentarios acerca de las variables a nivel numérico y su influencia a la hora de realizar cada simulación.

Recordamos que la temperatura de salida para el fluido 1, dados los cambios de variables realizados, es directamente la eficiencia del intercambiador.

3.1.1 Efecto de la pared en la eficiencia

Para evaluar el efecto de la pared hemos realizado distintas simulaciones para diferentes valores de los parámetros $[m, \kappa]$, valores de longitud del intercambiador ξ_L y efecto de la resistencia de la pared $1/\kappa_w$.

Queremos resaltar, llegados a este punto, que si sobre el intercambiador de calor realizamos un análisis a nivel macroscópico, podemos obtener una expresión en función de los parámetros $[m, \kappa]$ que liga las dos temperaturas medias de salida [2]. El resultado del análisis nos devuelve la siguiente expresión:

$$\theta_{m2,out} = 1 - \frac{1}{m\kappa} \theta_{m1,out} \quad (37)$$

A la vista de este resultado, podemos observar que para los pares $[m, \kappa]$ que cumplan $m\kappa = 1$ hay simetría presente en el intercambiador.

En la siguiente tabla se detallan los valores de los parámetros para las simulaciones realizadas:

m	κ	ξ_L	$1/\kappa_w$
1	1	[0.125, 0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
1	2	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
1	4	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
2	0.5	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
2	1	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
2	2	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]
4	1	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, ..., 0.5]

Tabla 4: Valores de los parámetros empleados en las simulaciones del apartado 3.1

Los resultados de las simulaciones se presentan en las siguientes figuras (figuras 16 a 22), donde representamos las temperaturas adimensionales de salida de los fluidos 1 y 2 a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Una vez más recordamos que la temperatura de salida del fluido 1 representa además la eficiencia del intercambiador.

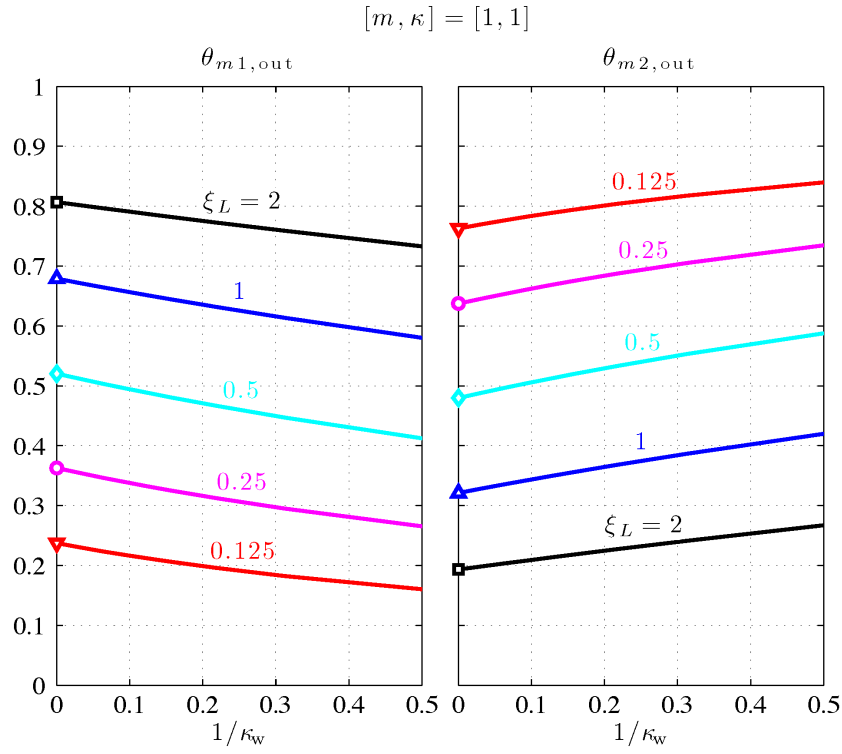


Figura 16: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [1, 1]$

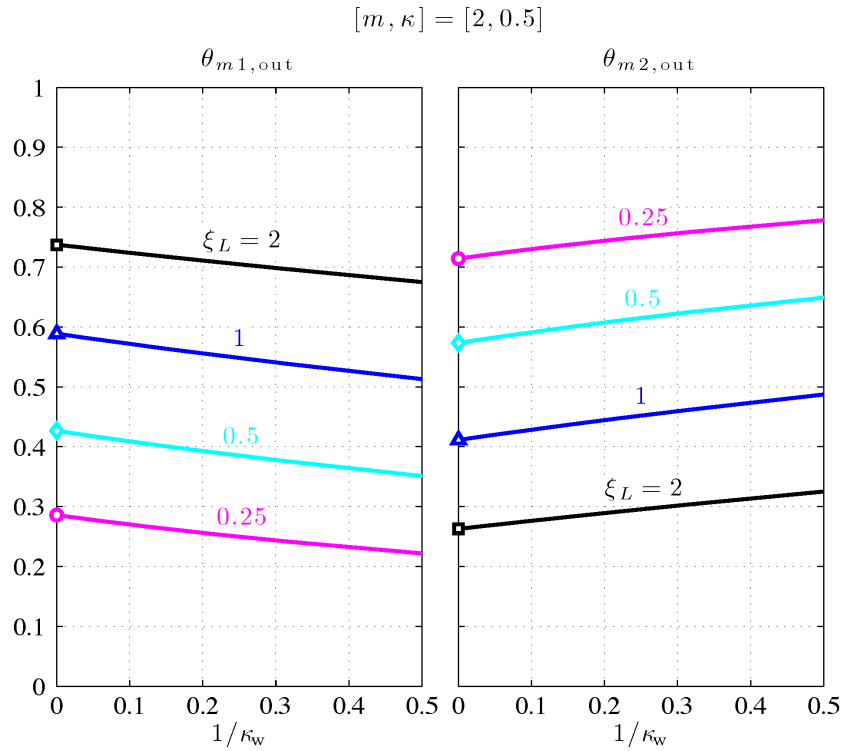


Figura 17: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [2, 0.5]$

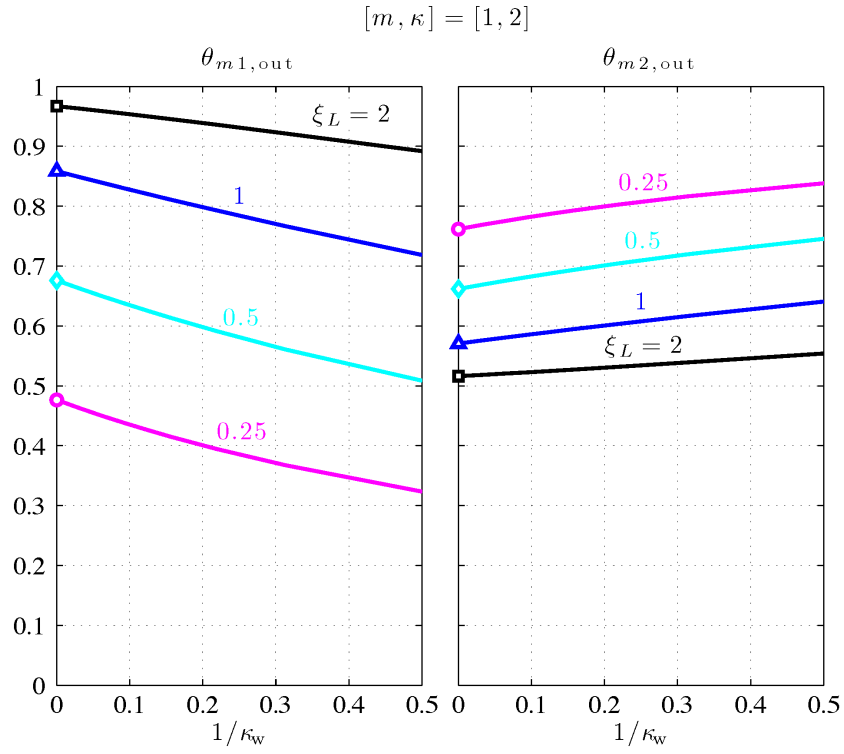


Figura 18: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [1, 2]$

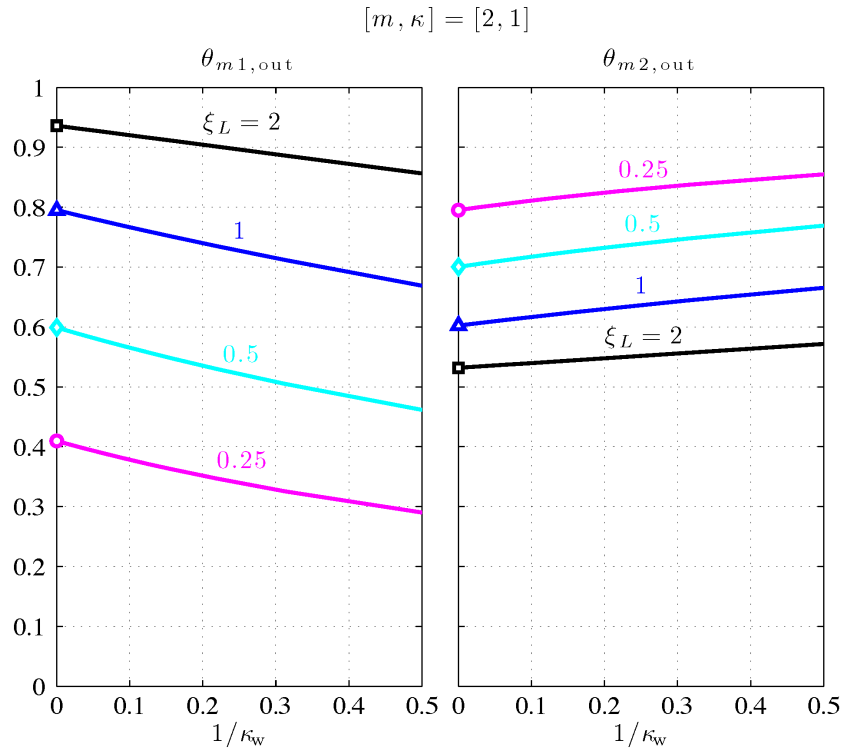


Figura 19: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [2, 1]$

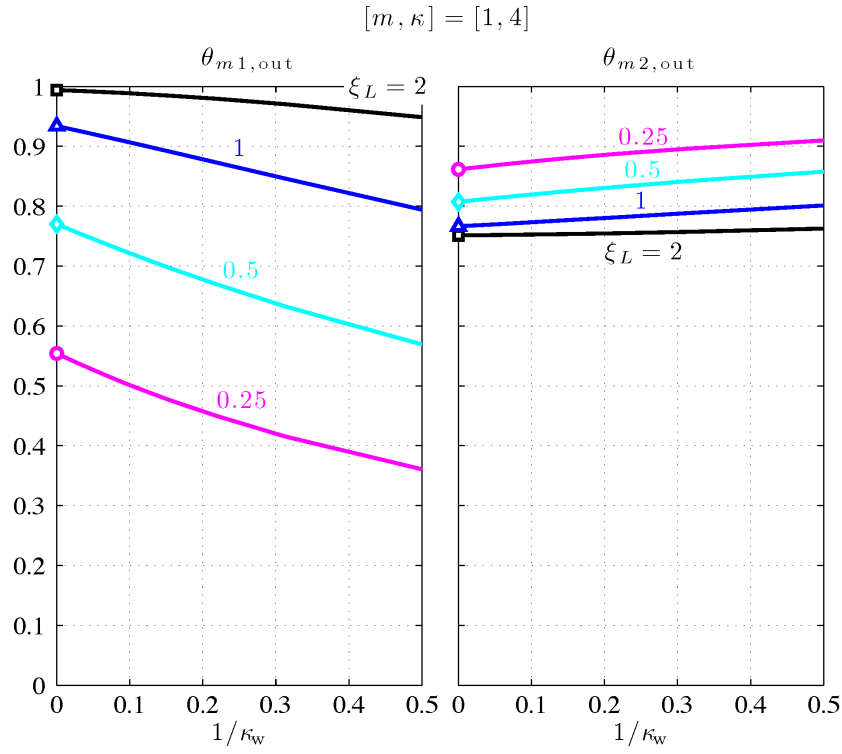


Figura 20: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [1, 4]$

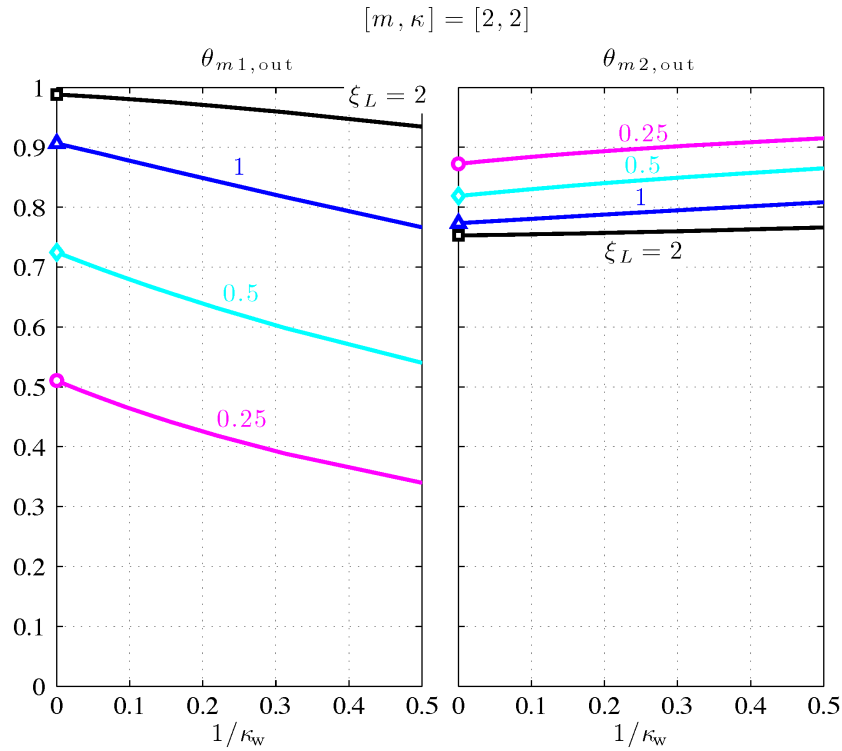


Figura 21: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [2, 2]$

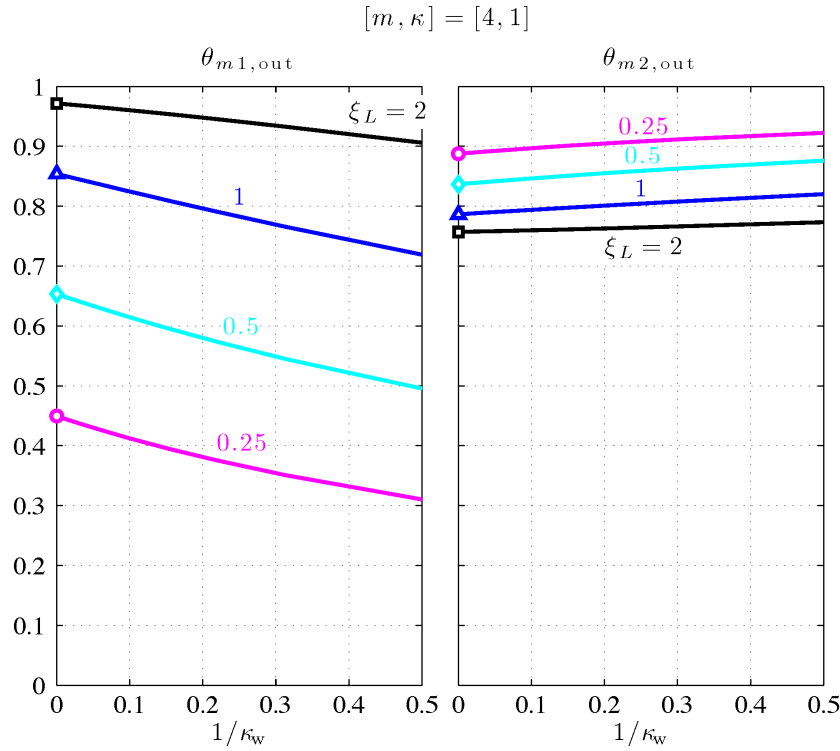


Figura 22: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa] = [4, 1]$

A la vista de los resultados obtenidos en las simulaciones, podemos observar que el comportamiento de todos los intercambiadores al aumentar el parámetro de resistencia en la pared $1/\kappa_w$ es decreciente, independientemente de la longitud del cambiador ξ_L y de los parámetros m y κ . Esto no quiere decir que todos los parámetros afecten por igual, como veremos en análisis posteriores, ni mucho menos que el decaimiento sea el mismo o tenga la misma forma, como se puede observar directamente de las figuras.

Estos resultados son esperables, ya que el parámetro de resistencia de pared $1/\kappa_w$, al aumentar, nos indica cuánto aumenta la resistencia térmica de la pared por lo que, al aumentar, la transferencia de calor será peor, disminuyendo así la eficiencia.

Como comentamos al introducir la ecuación (37), podemos observar la variación que se produce al aumentar el producto $m\kappa$. Observamos que para $m\kappa = 1$, figuras 16 y 17, el comportamiento del intercambiador es perfectamente simétrico.

Este comportamiento de simetría desaparece para valores de $m\kappa \neq 1$, y se alejará más respecto del caso simétrico cuanto mayor sea el producto $m\kappa$.

De esta manera se puede observar que las figuras 18 y 19, que tienen un producto $m\kappa = 2$, no presentan simetría, pero están más cerca de dicho comportamiento que las figuras 20, 21 y 22, que tienen un valor de $m\kappa = 4$.

Para poder observar de una manera más sencilla el efecto de la resistencia de la pared en la temperatura de salida y en la evolución del campo de temperaturas, se han representado unas gráficas con isoterma para distintos valores de resistencia térmica de la pared.

Para facilitar la observación se ha empleado una escala cromática y se ha representado con una línea más gruesa la isoterma para $T_i = 0.5$.

Las figuras que vamos a representar muestran las distribuciones de temperatura con las que se obtienen las eficiencias del intercambiador de la figura 16 (línea color cyan).

Los casos que se presentan en las siguientes figuras (figura 23 a 27) son los casos correspondientes a los siguientes parámetros numéricos:

$$[m, \kappa, \xi_L] = [1, 1, 0.5] \quad 1/\kappa_w = [0, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5]$$

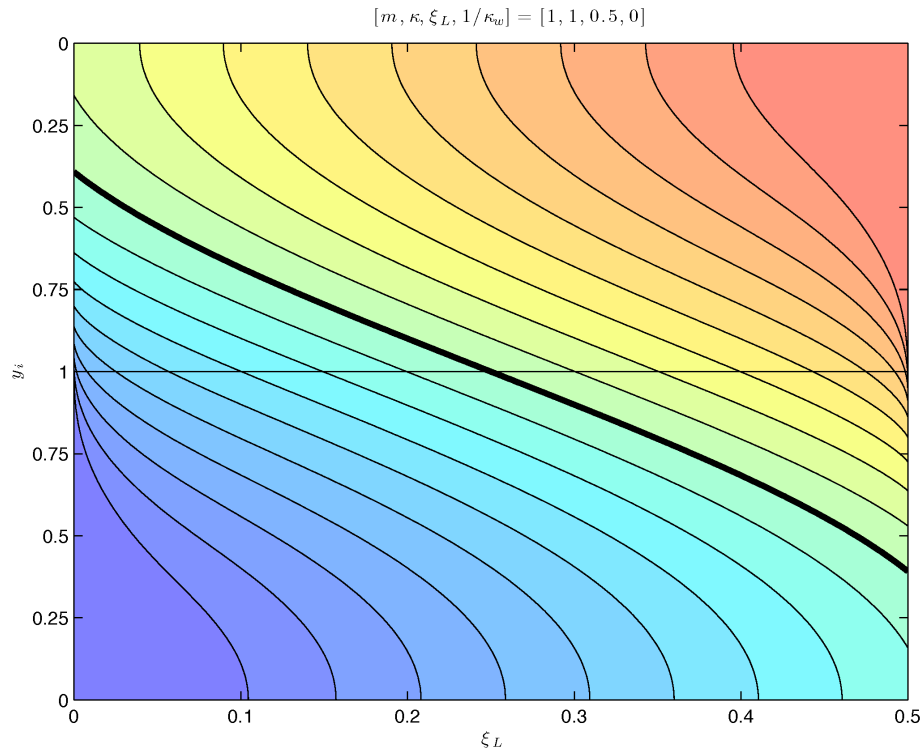


Figura 23: Isotermas del intercambiador para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.5, 0]$

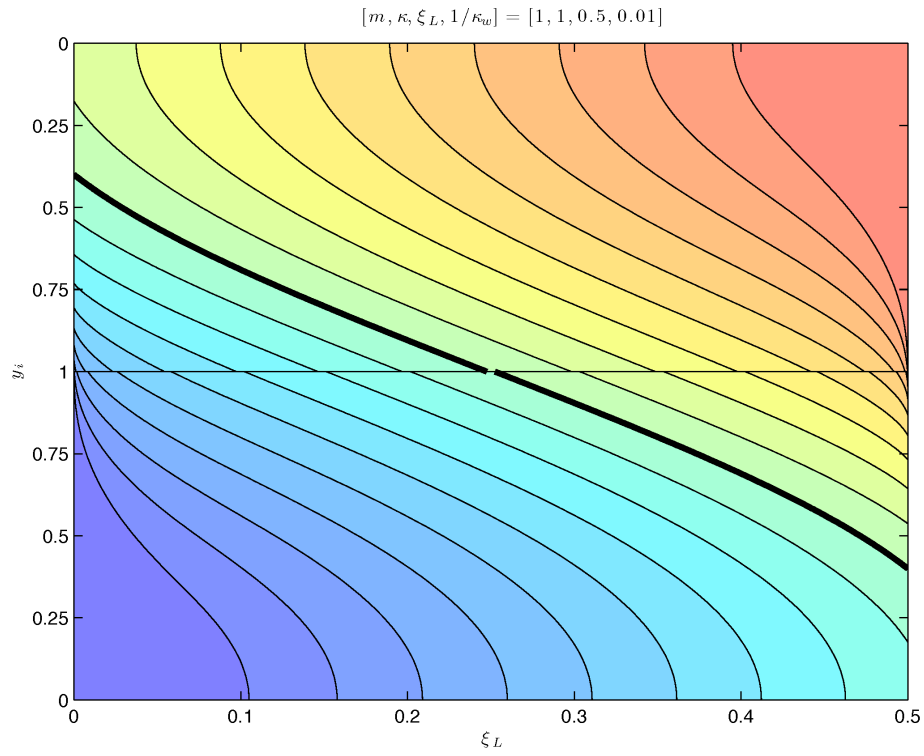


Figura 24: Isotermas del intercambiador para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.5, 0.01]$

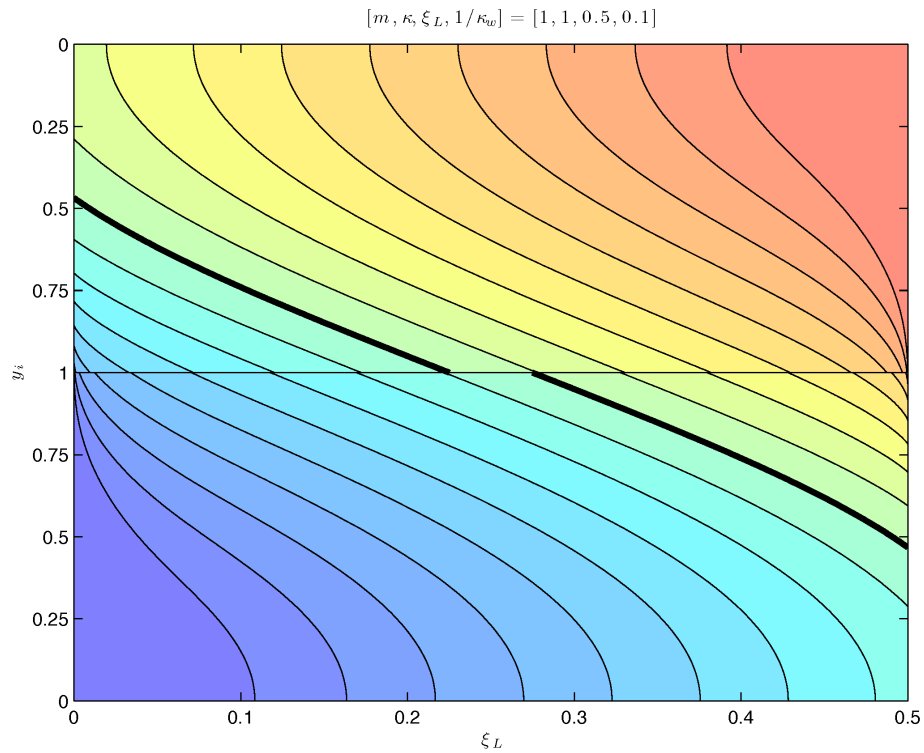


Figura 25: Isotermas del intercambiador para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.5, 0.1]$

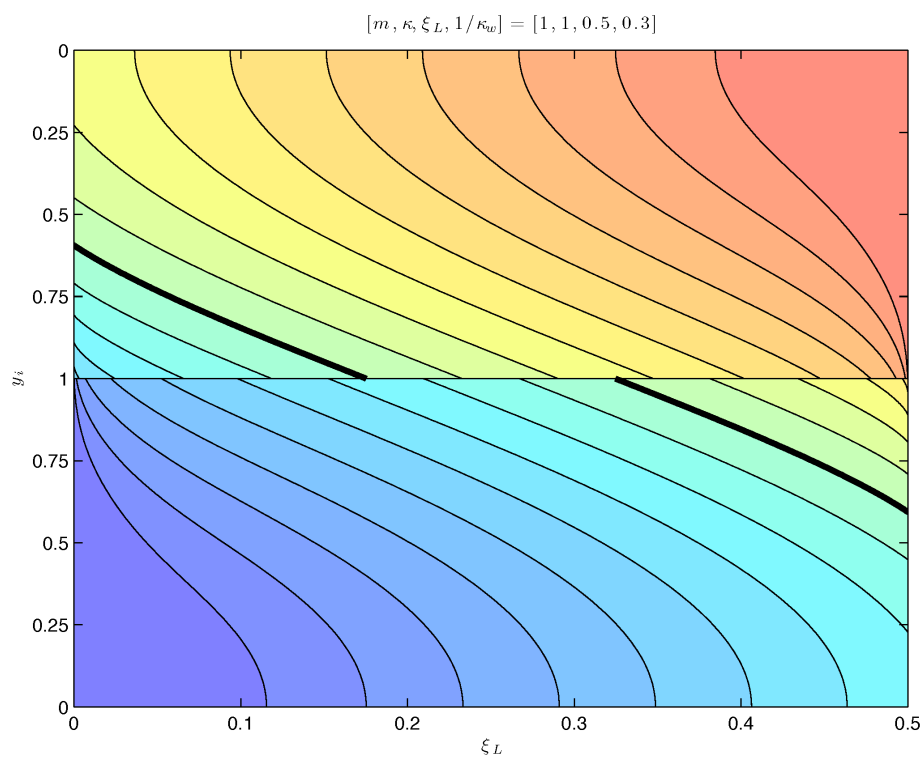


Figura 26: Isotermas del intercambiador para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.5, 0.3]$

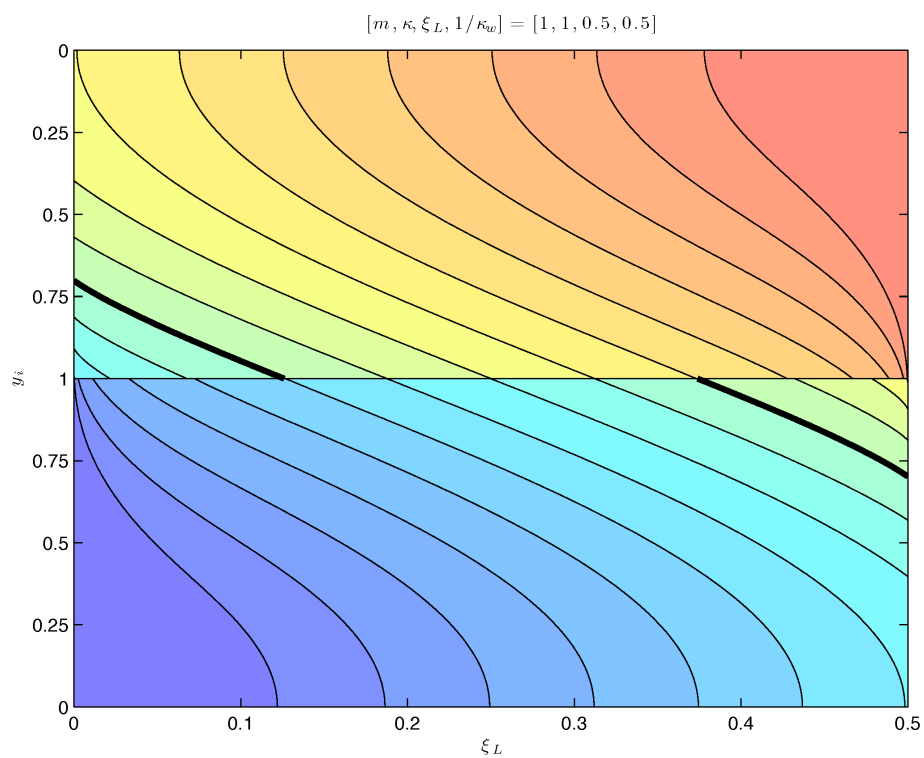


Figura 27: Isotermas del intercambiador para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.5, 0.5]$

Como ya dijimos antes, en estas figuras está representado el campo de isothermas para una configuración del intercambiador determinada. En la parte superior de cada figura observamos el fluido 2 que circula de derecha a izquierda entrando con una temperatura de entrada $\theta_{2,in} = 1$ (en color rojo), mientras que en la parte inferior tenemos el fluido 1 circulando de izquierda a derecha con una temperatura de entrada $\theta_{1,in} = 0$ (en color azul).

En estas gráficas queremos resaltar dos claras evoluciones:

- La primera de ellas es el efecto del salto térmico en la pared. Se puede observar bien gracias a la escala cromática empleada y al resalto de la temperatura $T_i = 0.5$. Se observa la evolución desde el primer caso con pared térmicamente delgada (figura 23), en el que el salto térmico en la pared es nulo (las isothermas coinciden perfectamente), hasta el último caso con un factor de resistencia de pared muy elevado (figura 27), donde el salto térmico es tremendamente elevado.
- La segunda de las evoluciones es, como ya comentamos antes, el efecto de la resistencia de la pared en la temperatura de salida. Se puede observar cómo las isothermas para el caso del fluido 1 (el inferior) se van “expandiendo” hacia la derecha, y las del fluido 2 se “expanden” hacia la izquierda de la misma manera. Esto se traduce en una pérdida de efectividad del intercambiador, como podemos ver claramente en la figura 16.

Para este caso en concreto, la eficiencia en el caso de pared térmicamente delgada y para el caso de resistencia térmica en la pared con factor $1/\kappa_w = 0.5$ son los siguientes:

	$\theta_{m1,out}$
$1/\kappa_w = 0$	0.5201953281
$1/\kappa_w = 0.5$	0.4122951712

Tabla 5: Ejemplo de la pérdida de eficiencia para el caso $[m, \kappa, \xi] = [1, 1, 0.5]$

Con estos datos obtenemos una pérdida de eficiencia de:

$$\frac{\theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0} - \theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0.5}}{\theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0}} \cdot 100 = 20.7422\%$$

Adjuntamos también una figura con gráficas para la evolución de la temperatura media de cada fluido y la de la pared para el caso de pared térmicamente delgada, $1/\kappa_w = 0$, y para el caso de pared con $1/\kappa_w = 0.5$:

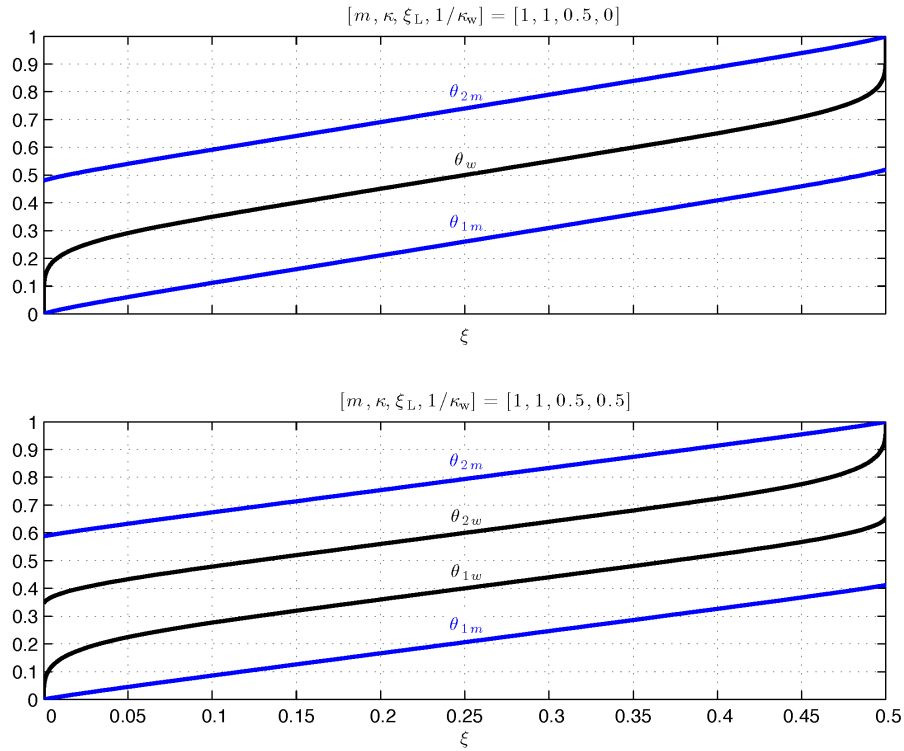


Figura 28: Evolución de la temperatura media de cada fluido (azul) y de la temperatura de pared en contacto con cada fluido (negro) para el intercambiador empleado como ejemplo en la tabla 5

Con esta figura podemos observar claramente el efecto de introducir una cierta resistencia térmica en la pared. Se puede observar la diferencia entre un intercambiador con pared térmicamente delgada (figura 28, gráfica superior) y otro con una resistencia térmica con $1/\kappa_w = 0.5$ (figura 28, gráfica inferior).

Se ve claramente cómo al introducir en la pared una resistencia térmica el valor de la temperatura de la pared en contacto con cada fluido deja de ser el mismo y comienza a alejarse del caso de referencia.

Del mismo modo, podemos observar cómo las temperaturas medias de cada fluido también se van alejando del caso que tomamos como referencia al incrementar el valor de la resistencia térmica de la pared.

3.1.2 Variación de la eficiencia con la longitud del intercambiador

Uno de los parámetros más importantes a la hora de diseñar un intercambiador, es su longitud. Como podemos observar en las gráficas obtenidas, los intercambiadores con los que se obtiene una mayor eficiencia son los intercambiadores que poseen una longitud de intercambio mayor.

Además, observamos también que con el aumento de la longitud del intercambiador la pérdida de eficiencia es menor.

En la siguiente figura representamos la diferencia entre la eficiencia del intercambiador para el caso de pared térmicamente delgada y pared con resistencia térmica con factor $1/\kappa_w = 0.5$:

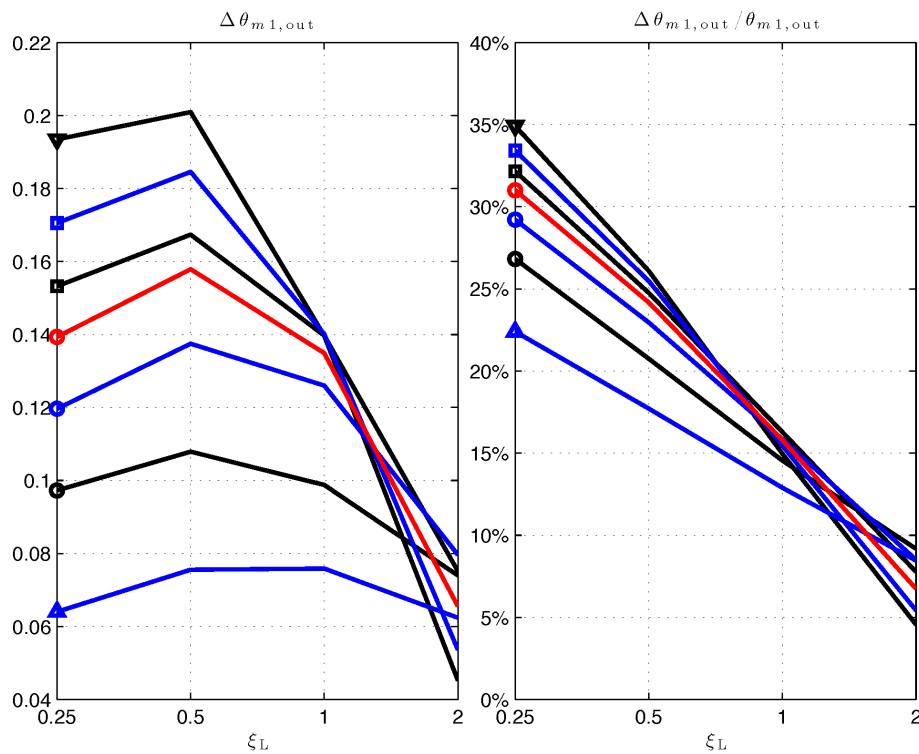


Figura 29: Pérdida de eficiencia en función de la longitud del intercambiador

$m = 1$	Negro	$\kappa = 0.5$	\triangle
$m = 2$	Azul	$\kappa = 1$	\circ
$m = 4$	Rojo	$\kappa = 2$	\square
		$\kappa = 4$	∇

Tabla 6: Leyenda de la figura 29

Gracias a la figura 29, podemos observar dos comportamientos muy claros:

- Cuanto más largo es el intercambiador, menor es la pérdida de eficiencia relativa que presenta, pasando de un máximo de un 35% para $\xi_L = 0.25$ a un mínimo de un 5% para $\xi_L = 2$.
- La importantísima influencia de la relación adimensional de conductividades κ . Para los intercambiadores más cortos, $\xi_L = 0.25$ y $\xi_L = 0.5$, cuanto menor es κ , menor es la pérdida tanto absoluta como relativa de eficiencia.

Podemos añadir a esta última observación, que el efecto del factor κ toma un valor inverso para intercambiadores largos $\xi_L = 2$. Se puede observar en la gráfica, que aproximadamente a partir de $\xi_L = 1$, hay un cruce en la evolución de la eficiencia. Esto se debe a que la eficiencia tiene un comportamiento asintótico hacia valores unitarios, por lo que cualquier efecto se verá reducido.

Resumimos los efectos observados en la siguiente tabla:

<i>Condición</i>	<i>Efecto observado</i>
ξ_L creciente	ϵ creciente
	$\Delta\epsilon_{rel}$ decreciente
κ creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ y $\Delta\epsilon_{abs}$ creciente

Tabla 7: Resumen de los efectos observados con la variación de ξ_L

3.1.3 Variación de la eficiencia manteniendo m constante

En este apartado, nuestro objeto de estudio es la variación de la eficiencia con el parámetro κ . Para ello hemos evaluado la eficiencia de varios intercambiadores manteniendo el valor de m constante.

Hemos podido realizar dos estudios con las simulaciones hechas. Los estudios cuyas gráficas se presentan a continuación son los siguientes:

m	κ	ξ_L	$1/\kappa_w$
1	[1, 2, 4]	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]
2	[0.5, 1, 2]	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]

Tabla 8: Valores de los parámetros estudiados en el apartado 3.1.3

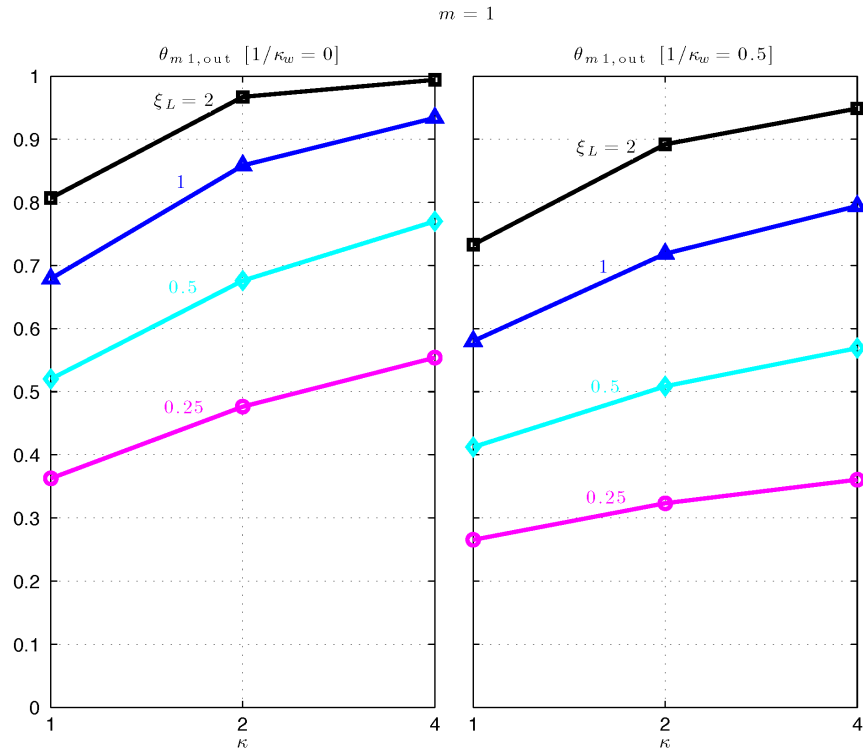


Figura 30: Variación de la eficiencia con κ para $m = 1$

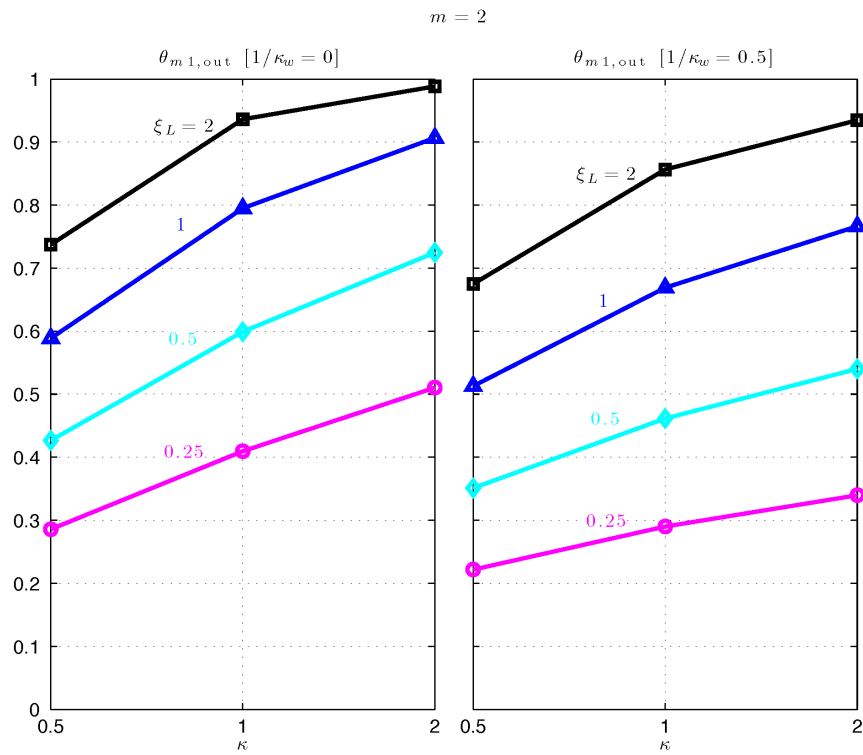


Figura 31: Variación de la eficiencia con κ para $m = 2$

En este caso la observación es bastante directa: la eficiencia del intercambiador se ve incrementada con el valor de κ , llegando a valores superiores al 90% para intercambiadores largos cuando κ es grande, a pesar del efecto de la pared.

La pared, a pesar de reducir la eficiencia del intercambiador, no contrarresta el efecto beneficioso que tiene el parámetro κ , pero sí que lo suaviza, sobre todo en intercambiadores cortos.

De momento poco más se puede decir sobre este parámetro. Será en el apartado 3.1.4 y en el 3.1.5 en el que retomaremos esta discusión al comparar el efecto de los parámetros m y κ entre sí.

3.1.4 Variación de la eficiencia manteniendo κ constante

De manera similar al apartado anterior, nuestro objeto de estudio en este apartado es la variación de la eficiencia con el parámetro m . Realizaremos el mismo análisis pero manteniendo esta vez el valor de κ constante.

Los resultados esperados para este estudio son similares a los obtenidos en el caso anterior, es decir, crecientes con m , como así lo sugieren las figuras 16 a 22. Sin embargo, la progresión con la que la eficiencia crece con m , debería diferir de la progresión con la que crece con κ .

Esta diferencia en la progresión del efecto de m y κ no es fácil de determinar. Emplearemos las figuras 32 y 33 para poder determinar la diferencia entre la progresión de los parámetros m y κ .

En este caso, sin embargo, no podemos tener gráficas tan completas debido a que los pares de valores $[m, \kappa]$ de los que disponemos no nos lo permiten.

Los estudios cuyas gráficas se presentan a continuación son los siguientes:

m	κ	ξ_L	$1/\kappa_w$
[1, 2, 4]	1	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]
[1, 2]	2	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]

Tabla 9: Valores de los parámetros estudiados en el apartado 3.1.4

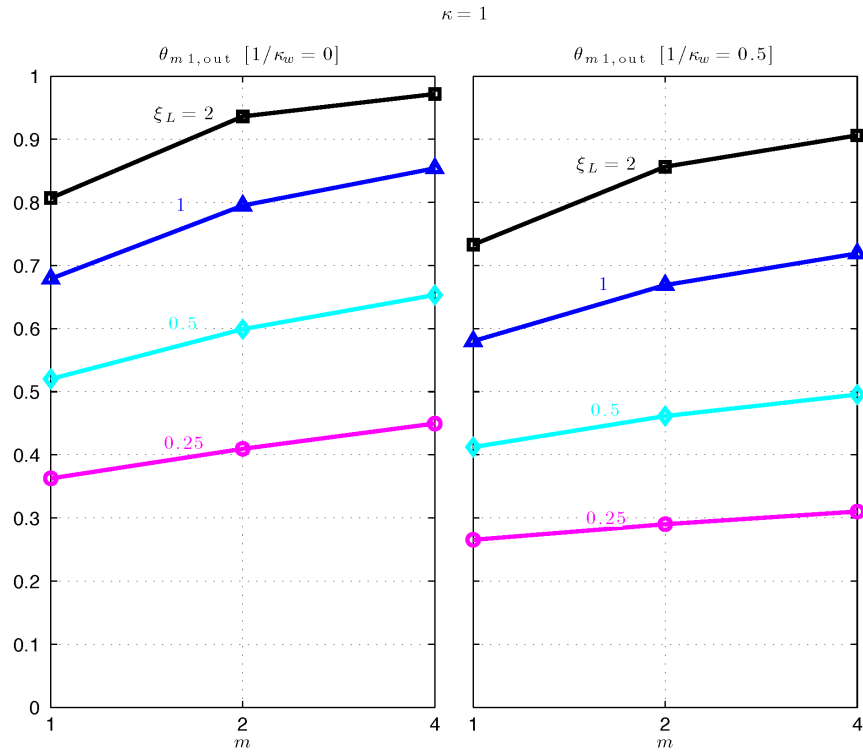


Figura 32: Variación de la eficiencia con m para $\kappa = 1$

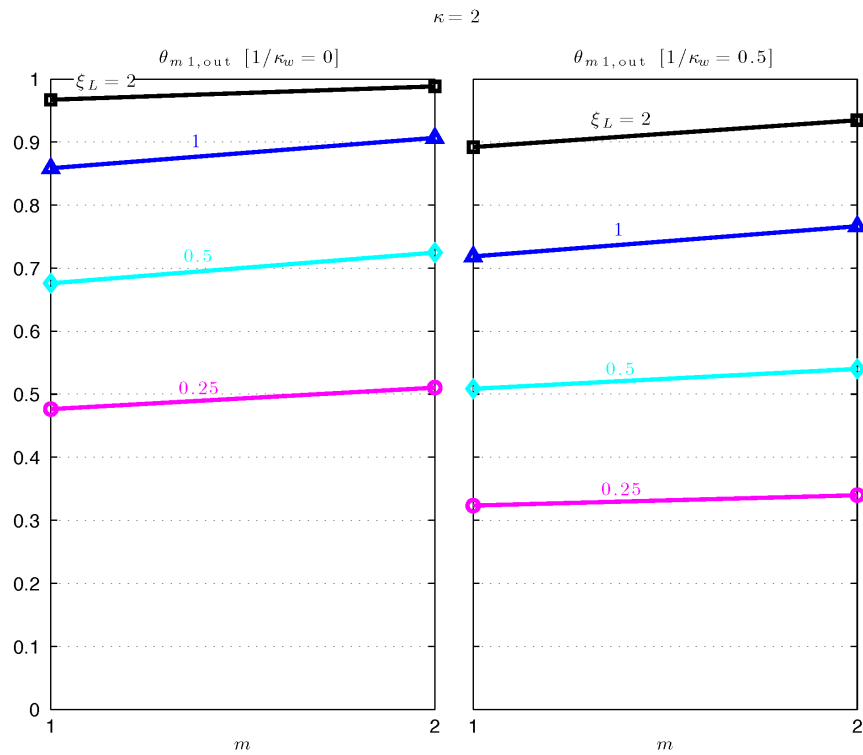


Figura 33: Variación de la eficiencia con m para $\kappa = 2$

A la vista de los resultados obtenidos concluimos que efectivamente, aumentar el valor del parámetro m induce un efecto positivo en la eficiencia del intercambiador.

Volvemos a observar el mismo comportamiento que en el apartado anterior respecto del incremento de la resistencia en la pared. Afecta a la eficiencia del intercambiador, pero no al efecto beneficioso que tiene el parámetro m sobre dicha eficiencia, aunque una vez más lo suaviza.

De igual modo, el efecto beneficioso que un aumento de m induce en el intercambiador es, aparentemente, menor que el que induce el parámetro κ .

Para poder afirmar con seguridad cuál de los dos parámetros es más determinante en lo que a la eficiencia respecta vamos a realizar un cálculo promedio de la pendiente para cada valor de m y κ constantes para los resultados representados en las figuras 30 a 33.

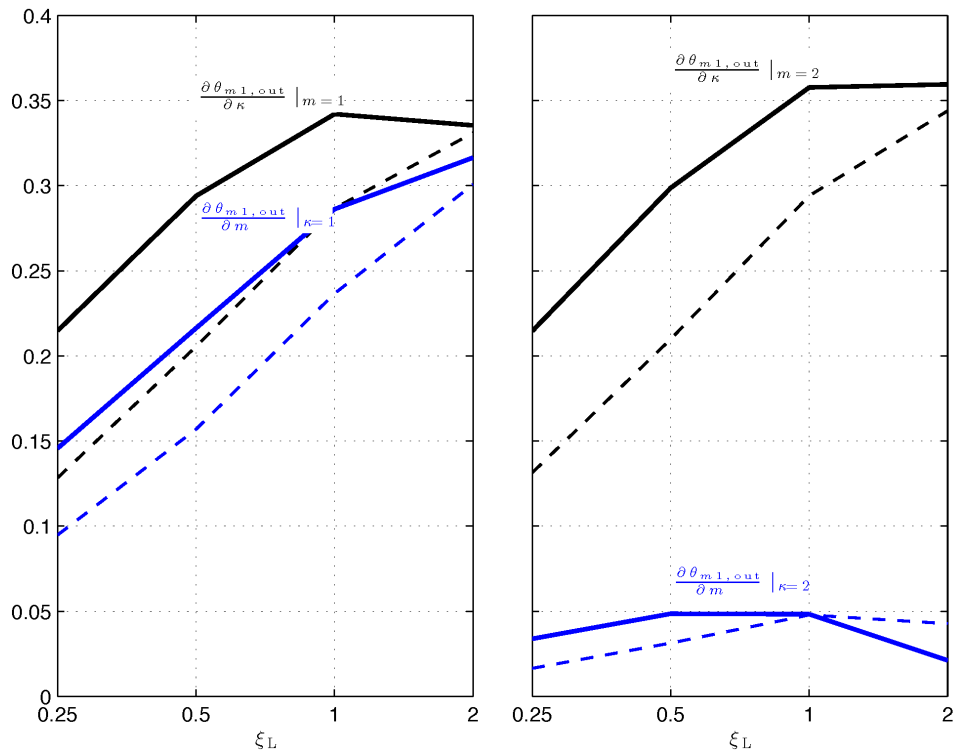


Figura 34: Representación cuantitativa (pendiente) del efecto de aumentar los parámetros κ (negro) y m (azul) en función de la longitud del intercambiador, para valores de $m = \kappa = 1$ (izquierda) y $m = \kappa = 2$ (derecha). Las líneas continuas representan $1/\kappa_w = 0$ y las discontinuas $1/\kappa_w = 0.5$

De observar esta figura llegamos a la clara conclusión de que el parámetro que más afecta es κ frente a m y que esta diferencia se ve incrementada cuanto mayor sean los valores que se mantienen constantes para cada caso.

3.1.5 Variación de la eficiencia manteniendo el producto $m\kappa$ constante

Nuestro objeto de estudio en este apartado es ver el efecto que tiene el producto de los parámetros m y κ . Mantendremos el producto $m\kappa$ constante y observaremos la variación en la eficiencia.

Como antes, vamos a obtener una serie de gráficas que nos ayuden a ver este efecto. Los parámetros con los que vamos a obtener dichas figuras son los siguientes:

m	κ	$m\kappa$	ξ_L	$1/\kappa_w$
[1, 2]	[1, 0.5]	1	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]
[1, 2]	[2, 1]	2	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]
[1, 2, 4]	[4, 2, 1]	4	[0.25, 0.5, 1, 2]	[0, 0.5]

Tabla 10: Valores de los parámetros de estudio en el apartado 3.1.5

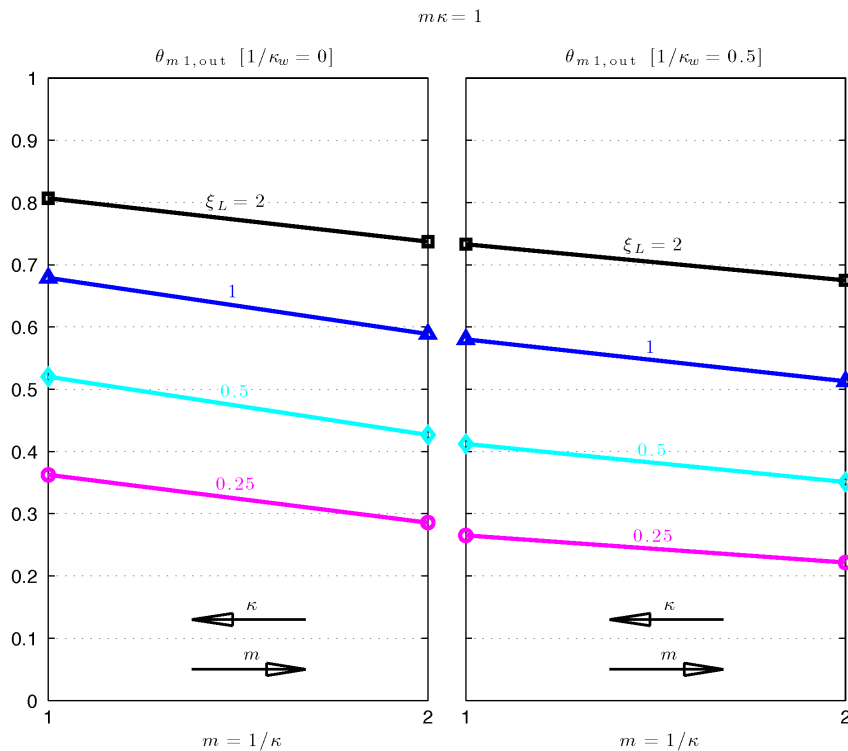


Figura 35: Variación de la eficiencia con $m\kappa = 1$ constante para $1/\kappa_w = 0$ y $1/\kappa_w = 0.5$

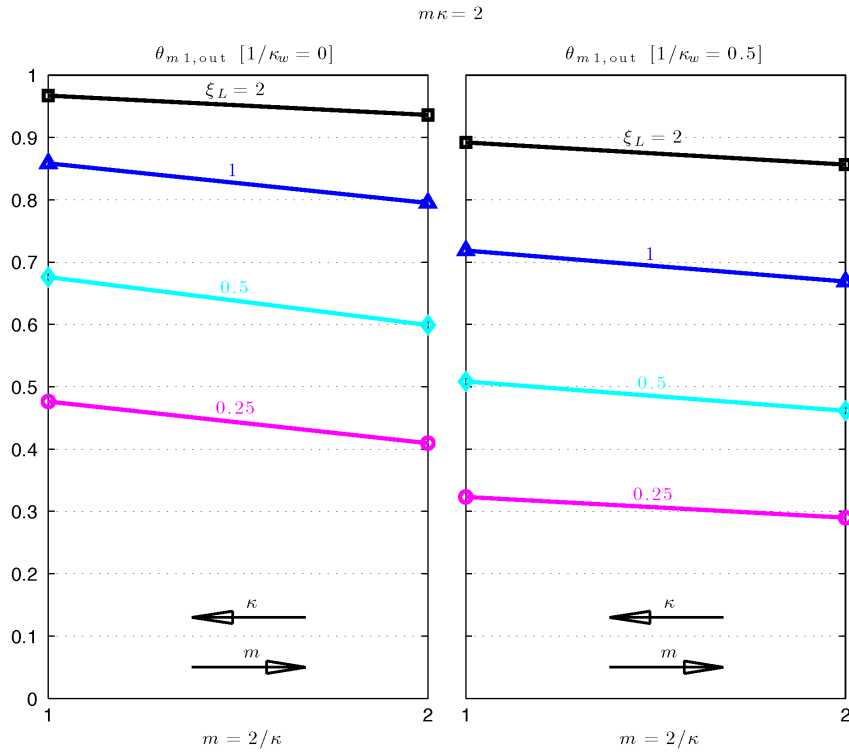


Figura 36: Variación de la eficiencia con $m\kappa = 2$ constante para $1/\kappa_w = 0$ y $1/\kappa_w = 0.5$

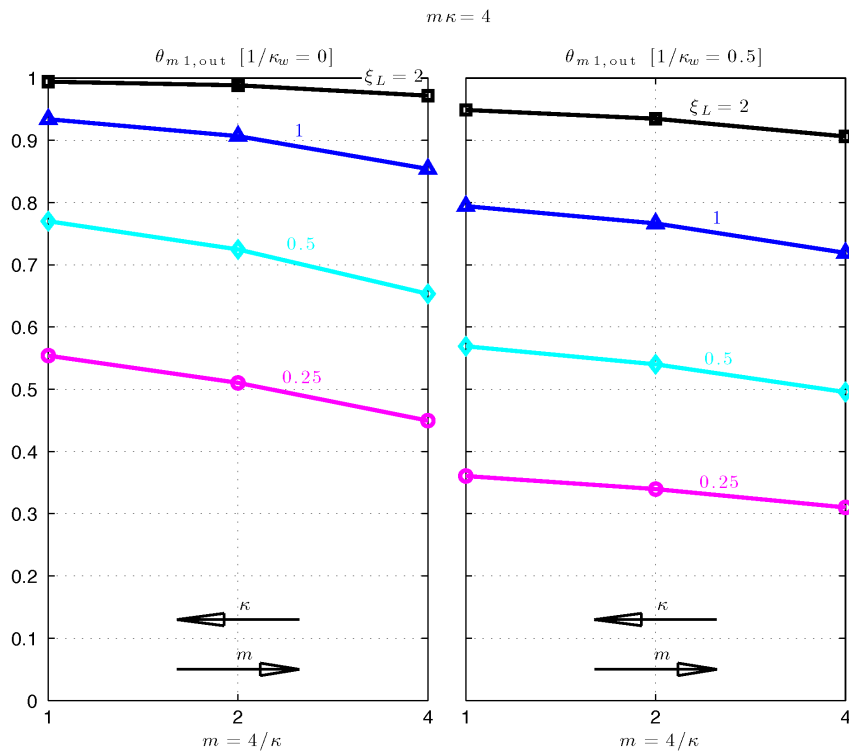


Figura 37: Variación de la eficiencia con $m\kappa = 4$ constante para $1/\kappa_w = 0$ y $1/\kappa_w = 0.5$

A la vista de los resultados obtenidos en las figuras anteriores, llegamos a dos claras conclusiones:

- Por un lado, que aumentar el valor del producto $m\kappa$ mejora la eficiencia del intercambiador.
- Por otro lado, que para un valor del producto $m\kappa$ constante, aumentar el valor del parámetro m disminuye la eficiencia del intercambiador mientras que aumentar el valor del parámetro κ la aumenta.

Al comparar además el caso de pared térmicamente delgada con el caso en el que tenemos una cierta resistencia térmica, volvemos a observar el mismo comportamiento: la resistencia térmica reduce el efecto que ambos parámetros introducen en el fluido.

Este efecto, una vez más, se observa en que las pendientes que observamos en las figuras 35 a 37 son más suaves cuando la pared del intercambiador tiene una cierta resistencia térmica (gráficas de la derecha) que cuando tenemos el caso de pared térmicamente delgada (gráficas de la izquierda).

Todos los resultados y tendencias que hemos obtenido sobre la variación de la eficiencia del intercambiador frente a los distintos parámetros que lo configuran en los apartados 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5 se resumen en la siguiente tabla:

<i>Condición</i>	<i>Efecto observado</i>
m creciente con $\kappa = cte$	ϵ creciente (menor efecto que κ)
κ creciente con $m = cte$	ϵ creciente (mayor efecto que m)
m creciente con $m\kappa = cte$	ϵ decreciente
κ creciente con $m\kappa = cte$	ϵ creciente
$1/\kappa_w$ creciente	ϵ decreciente
	Efectos de m y κ atenuados

Tabla 11: Resumen de los efectos observados con la variación de m , κ y $1/\kappa_w$

Queremos volver a hacer hincapié en que cuando la eficiencia del intercambiador es próxima a 1, debido a su tendencia asintótica hacia dicho valor, todos los efectos de los parámetros y las tendencias observadas comienzan a alterarse y en casos extremos pueden llegar a no cumplirse.

Un claro ejemplo de esta situación son las figuras 29 y 34, donde para longitudes de cambiador largas ($\xi_L = 2$, donde se consiguen eficiencias próximas a la unidad) las tendencias que tienen las gráficas dejan de ser claras.

3.1.6 Efectos de los parámetros numéricos en las simulaciones

A lo largo de la realización de las simulaciones se ha observado un efecto que merece especial interés, sobre todo de cara a futuras simulaciones. Dicho efecto es el mallado necesario para resolver el sistema.

Hay dos parámetros principales que intervienen en el mallado necesario para que el sistema converja: m y ξ_L . Los parámetros adimensionales de conductividad κ y resistencia de la pared $1/\kappa_w$ no intervienen en este caso.

A continuación presento una tabla con los valores de los parámetros y el mallado realizado en cada caso:

	$\xi_L = 0.125$	$\xi_L = 0.25$	$\xi_L = 0.5$	$\xi_L = 1$	$\xi_L = 2$
$m = 1$	128 x 256	128 x 192	128 x 128	128 x 128	128 x 128
$m = 2$	---	128 x 256	128 x 192	128 x 128	128 x 128
$m = 4$	---	64 x 256	128 x 256	128 x 192	128 x 128

Tabla 12: Valores del mallado ($N_\chi \times N_\eta$) realizado para valores de m y ξ_L .

	$\xi_L = 0.125$	$\xi_L = 0.25$	$\xi_L = 0.5$	$\xi_L = 1$	$\xi_L = 2$
$m = 1$	2	1.5	1	1	1
$m = 2$	---	2	1.5	1	1
$m = 4$	---	4	2	1.5	1

Tabla 13: Valores de la relación de malla ($N_\eta:N_\chi$) para valores de m y ξ_L .

En estas tablas se presenta el mallado realizado para cada caso (tabla 12) y la relación de número de divisiones transversales N_η frente al número de divisiones longitudinales N_χ (el número de nodos se obtiene $N_{\text{nodos},i} = N_i + 1$).

Recordamos que los subíndices de los números de divisiones representan a las variables transversal η y longitudinal χ que vienen definidas por las ecuaciones 35 y 36 respectivamente.

Los resultados que estas dos tablas arrojan quieren decir que, a nivel numérico, las celdas tienen que ser lo más “cuadradas” posibles, o en el mejor

de los casos, “alargadas horizontalmente”, es decir, rectangulares paralelas al eje longitudinal (paralelas a la pared de intercambio).

El estudio de este efecto es interesante de cara a la realización de simulaciones para intercambiadores muy cortos o para valores de m elevados, o evidentemente, la combinación de ambos.

3.2 Análisis de resultados para el caso general: flujo de calor transversal y longitudinal (caso 2)

Retomamos el caso de estudio con las ecuaciones en su formulación más general, permitiendo transferencia de calor longitudinal a lo largo de la pared. En este caso, las condiciones de contorno que necesitamos implementar son las siguientes:

C. C. de salto térmico:

$$\theta_{2w} - \theta_{1w} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} - \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (17)$$

C. C. de salto de flujos de calor:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} + \kappa \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} \Big|_{y_2=1} = \frac{\delta_w^2 \kappa_w}{Pe_1^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \Big|_{y_1=1} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \Big|_{y_2=1} \right) \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \xi_L \quad y_i = 1 \quad (19)$$

Para poder observar bien el efecto que introducen estas condiciones de contorno en su formulación más general hemos optado por poner valores límites a los términos δ_w y Pe_1 , de tal forma que las hipótesis empleadas para deducir las ecuaciones están en el umbral de la validez.

Los valores en concreto que han tomado estas dos variables son:

$$\delta_w = 0.1 \quad Pe_1 = 50$$

Para el caso que vamos a estudiar, es decir $Pe_1 = 50$, el valor que toma la condición de aplicabilidad para el salto de flujos de calor en su formulación más general (19) para $[m, \kappa, \xi_L, 1/\kappa_w] = [1, 1, 0.25, 0.01]$ ($[j, \alpha(j)] = [1/6, 0.7]$ para el caso estudiado [1]) es:

$$\frac{\xi_c}{\xi_L} \sim \frac{1}{\xi_L} \left(\frac{\delta_w^2 \kappa_w j(j-1)}{Pe_1^2 \alpha(j)} \right)^{\frac{3}{5}} \sim \frac{1}{0.25} \left(\frac{0.1^2 100 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} - 1 \right)}{50^2 \cdot 0.7} \right)^{\frac{3}{5}} \sim 1.3 \cdot 10^{-2}$$

Con este resultado, podemos anticipar que la variación porcentual de la temperatura para este caso, salvo factores de orden unidad, será $1.3 \cdot 10^{-2}$. Este resultado anticipado ahora, lo podemos confirmar con los resultados que arroja la figura 40, explicada con detalle más adelante.

3.2.1 Efecto de la transferencia de calor longitudinal en la eficiencia

Para la realización de este estudio hemos empleado los resultados de las simulaciones realizadas para el caso simplificado anterior para poder comparar y hemos realizado una serie de simulaciones nuevas con las C. C. nuevas.

Estas simulaciones las hemos realizado con los siguientes parámetros:

m	κ	ξ_L	$1/\kappa_w$
1	1	[0.125, 0.25, 0.5, 1, 2]	[0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]

Tabla 14: Valores de los parámetros empleados en las simulaciones del apartado 3.2

Debido al alto coste computacional requerido para la simulación de este caso, no ha sido posible realizar simulaciones para valores de resistencia de pared inferiores a $1/\kappa_w = 0.01$. Asimismo, y debido a que el efecto de la transferencia longitudinal en la pared se da en las zonas de entrada y salida, hemos realizado la simulación para un intercambiador más corto $\xi_L = 0.125$ con el fin de hacer que esas zonas tengan una mayor presencia en el intercambiador y observar mejor su efecto. Además, hemos añadido el valor $1/\kappa_w = 0.05$ respecto de las simulaciones anteriores para suavizar las curvas lo más posible.

En la siguiente figura (figura 38) se presentan los resultados de las simulaciones realizadas para el caso general (con transferencia longitudinal de

calor) superpuestas con las simulaciones anteriores realizadas para el caso simplificado (sin transferencia longitudinal de calor).

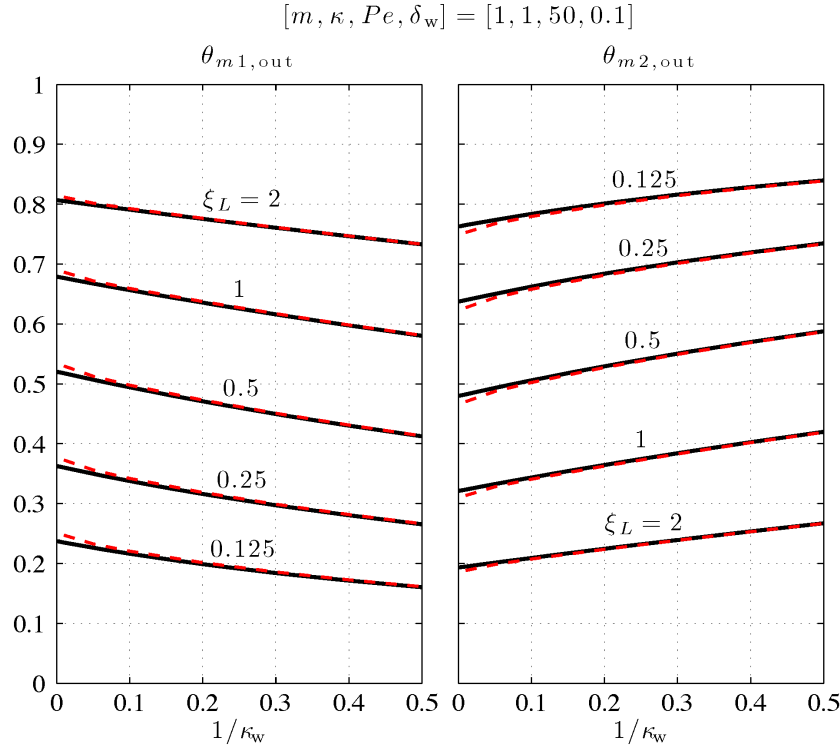


Figura 38: Evolución de la eficiencia para $[m, \kappa, Pe, \delta_w] = [1, 1, 50, 0.1]$

En esta figura se puede observar el efecto de la transferencia de calor longitudinal a lo largo de la pared. Las líneas negras representan el caso en el que no hay transferencia de calor longitudinal a lo largo de la pared (figura 16) y las líneas rojas representan el caso en el que sí hay transferencia de calor longitudinal a lo largo de la pared.

Para poder apreciar mejor el efecto para valores de resistencia de pared bajos, se ha eliminado la marca gruesa que indicaba el valor de referencia (mayor simplificación, caso 0).

Podemos observar que la evolución de la eficiencia con transferencia longitudinal de calor se aproxima a su evolución sin transferencia de calor cuando la resistencia de pared aumenta. Por otro lado, a medida que la resistencia de pared disminuye, hay mayor libertad de flujo de calor (en la pared), la transferencia de calor a través de la pared se ve promovida, por lo que la eficiencia con transferencia longitudinal de calor en la pared se ve incrementada sobre la eficiencia sin transferencia de calor longitudinal en la pared.

Este efecto se puede observar bien en la figura 38, pero no se puede cuantificar. Por ello, hemos realizaremos más adelante una gráfica (figura 40) en la que observar y cuantificar adecuadamente el incremento de eficiencia.

Adicionalmente hemos realizado una gráfica con las temperaturas de pared para los casos $[m, \kappa, \xi_L] = [1, 1, 0.25]$ y $[1/\kappa_w] = [0.01, 0.5]$, para observar el efecto que introducimos en la temperatura de la pared cuando permitimos transferencia de calor longitudinal a través de ella.

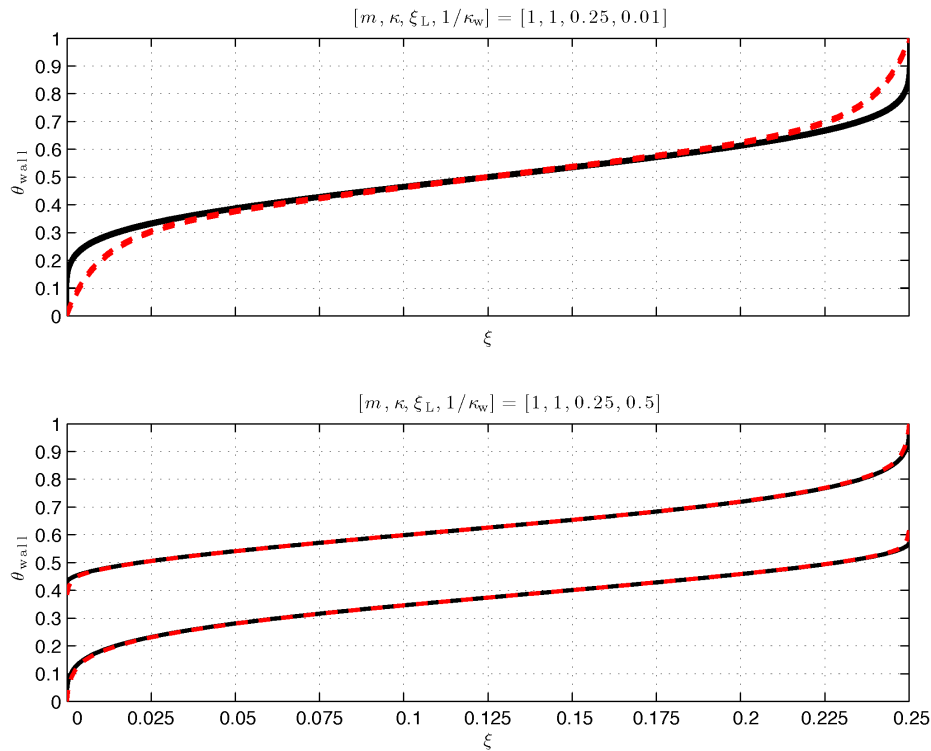


Figura 39: Diferencias entre la temperatura de pared en función de ξ para un intercambiador sin transferencia longitudinal de calor (negro) y con transferencia longitudinal de calor (rojo) para dos valores extremos de $1/\kappa_w$. Las líneas superiores indican el fluido 2 y las inferiores el fluido 1

Gracias a esta figura podemos observar con detalle la diferencia entre pared sin (negro) y con (rojo) transferencia de calor longitudinal.

Observamos que cuando el valor de la resistencia térmica de la pared es elevado (figura 39, gráfica inferior), apenas hay diferencia entre ambos casos, observándose simplemente una muy pequeña separación entre las dos curvas en las zonas de salida de los fluidos.

Por otro lado, cuando la resistencia térmica toma valores bajos (figura 39, gráfica superior), a pesar de no poder distinguir bien las temperaturas para las zonas de contacto de los fluidos con cada lado de la pared, podemos ver que la

temperatura de pared con transferencia longitudinal se aleja notablemente de la temperatura de pared sin transferencia longitudinal en las zonas de entrada y salida del intercambiador.

Además, se puede observar también para este caso de resistencia térmica en la pared como la singularidad (una pendiente prácticamente vertical de la temperatura implica un valor del flujo de calor teniendo a infinito) que aparece en las entradas y salidas se ve reducida notablemente.

La figura que presentamos a continuación es la que hemos mencionado anteriormente en la que realizamos un análisis incremental sobre las eficiencias para poder observar con claridad y cuantificar el efecto de la transferencia longitudinal en la pared.

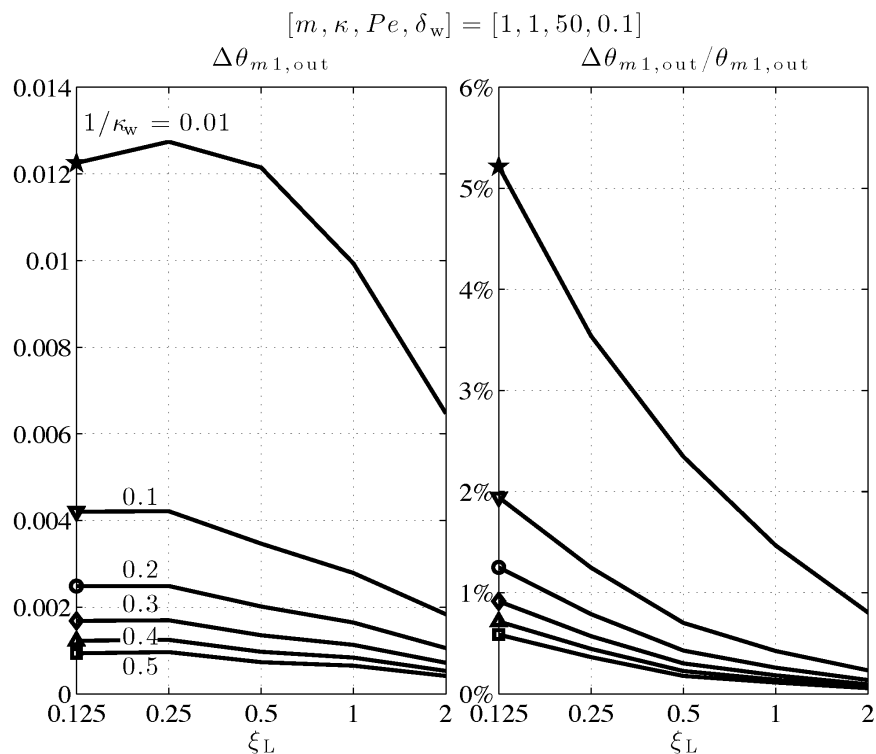


Figura 40: Detalle del incremento absoluto y relativo de eficiencia al permitir la transferencia de calor longitudinal a lo largo de la pared

En esta figura podemos observar bien dos efectos:

- El primero es que cuanto menor es la resistencia térmica de la pared mayor es el aumento de la eficiencia. Como hemos explicado antes, cuanto menor es la resistencia que la pared ofrece, mayor es el flujo de calor que hay. Por tanto, al tener transferencia longitudinal (además de la transversal que también la tiene el caso simplificado), este efecto de

incremento de la transferencia de calor se traduce en un incremento de eficiencia mayor cuanto menor sea la resistencia térmica de la pared.

- b) El segundo de los efectos es la disminución del incremento de eficiencia a medida que la longitud del intercambiador aumenta. Esto se debe a que la zona o el tamaño de la pared donde la transferencia de calor longitudinal es importante tiene un valor determinado y es independiente de la longitud del intercambiador, como se puede observar en su expresión en la ecuación 25.

Por tanto, al aumentar el tamaño del intercambiador, lo único que estamos haciendo es reducir el porcentaje en el que esta zona es importante, como podemos observar en la ecuación 26.

Paralelamente a estos dos efectos generales, es interesante ver que el intercambiador más corto es el que mayor aumento relativo tiene de la eficiencia, pero no es el que mayor aumento absoluto tiene, aunque está cerca.

La longitud de intercambiador con el que se obtiene un mayor incremento de la eficiencia es $\xi_L = 0.25$.

Como resumen de los efectos observados con este análisis presentamos la siguiente tabla:

<i>Condición</i>	<i>Efecto observado</i>
ξ_L creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ decreciente
$1/\kappa_w$ creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ y $\Delta\epsilon_{abs}$ decreciente

Tabla 15: Resumen de los efectos observados al introducir transferencia de calor longitudinal

NOTA: No confundir estos resultados con los expresados en la tabla 7. Estos resultados expresan la variación en eficiencia al introducir la transferencia de calor longitudinal, mientras que los de la tabla 7 indican la variación de la eficiencia al introducir la resistencia térmica de la pared.

3.2.2 Efecto de los parámetros numéricos en las simulaciones

Al igual que cuando realizamos las simulaciones para la simplificación sin transferencia de calor longitudinal, vamos a exponer los parámetros más

influyentes a nivel numérico que han tomado especial protagonismo en este caso.

Lo primero es comentar que debido a que no hemos realizado simulaciones para diferentes valores de m y κ , no podemos afirmar que el parámetro m influya en este caso de la misma manera que en el caso anterior, ni que el parámetro κ siga sin influir.

Los parámetros que en este caso han afectado han sido ξ_L y $1/\kappa_w$. La siguiente tabla indica el número de celdas que hemos empleado para la simulación de cada caso:

	$\xi_L = 0.125$	$\xi_L = 0.25$	$\xi_L = 0.5$	$\xi_L = 1$	$\xi_L = 2$
$1/\kappa_w = 0.01$	50 x 750	64 x 512	64 x 256	64 x 256	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.05$	64 x 512	64 x 256	64 x 256	128 x 128	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.1$	128 x 256	128 x 256	128 x 256	128 x 128	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.2$	128 x 256	128 x 256	128 x 256	128 x 128	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.3$	128 x 256	128 x 256	128 x 256	128 x 128	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.4$	128 x 256	128 x 256	128 x 256	128 x 128	128 x 128
$1/\kappa_w = 0.5$	128 x 256	128 x 256	128 x 256	128 x 128	128 x 128

Tabla 16: Valores del mallado ($N\chi \times N\eta$) realizado para valores de $1/\kappa_w$ y ξ_L

	$\xi_L = 0.125$	$\xi_L = 0.25$	$\xi_L = 0.5$	$\xi_L = 1$	$\xi_L = 2$
$1/\kappa_w = 0.01$	15	8	4	4	1
$1/\kappa_w = 0.05$	8	4	4	1	1
$1/\kappa_w = 0.1$	2	2	2	1	1
$1/\kappa_w = 0.2$	2	2	2	1	1
$1/\kappa_w = 0.3$	2	2	2	1	1
$1/\kappa_w = 0.4$	2	2	2	1	1
$1/\kappa_w = 0.5$	2	2	2	1	1

Tabla 17: Valores de la relación de malla ($N\eta:N\chi$) para valores de $1/\kappa_w$ y ξ_L

Igual que en el estudio de los parámetros numéricos para el intercambiador sin transferencia longitudinal estamos representando el mallado realizado para cada caso (tabla 16) y la relación de número de divisiones transversales N_η frente al número de divisiones longitudinales N_χ .

Recordamos que los subíndices de los números de divisiones representan a las variables transversal η y longitudinal χ que vienen definidas por las ecuaciones 35 y 36 respectivamente.

Observamos cómo a medida que cada uno de los parámetros disminuye, la relación $N_\eta:N_\chi$ tiene que incrementarse, de manera similar a como lo veíamos en el caso anterior con los parámetros m y ξ_L .

Sin embargo, ahora esta relación aumenta notablemente más rápido que la que obteníamos para el caso simplificado en caso de ξ_L .

Aunque no tenemos simulaciones realizadas para distintos valores de m y κ con transferencia longitudinal de calor, es probable que se de la misma relación que observamos en el estudio de las mallas para simulaciones sin transferencia longitudinal de calor.

El estudio de esta relación tiene como objeto indicar las tendencias que se observan para el caso de necesitar realizar futuras simulaciones para intercambiadores aún más cortos o para valores de resistencia térmica más próximos al caso de pared térmicamente delgada.

4. Similitud del estudio realizado con datos de intercambiadores reales

Queremos dar ahora un significado físico a los parámetros implicados en las simulaciones, para verificar que los resultados obtenidos a lo largo de este proyecto concuerdan con intercambiadores empleados en la actualidad. Para ello nos vamos a servir de los datos indicados en las tablas 1 y 2, donde podemos encontrar diferentes valores de conductividades térmicas para paredes de intercambio.

El parámetro más determinante a la hora de obtener equivalencias con materiales y configuraciones de intercambiador reales es el parámetro de la resistencia térmica de la pared $1/\kappa_w$. Analizaremos únicamente este parámetro ya que el resto de los parámetros m , κ y ξ_L están impuestos debido al uso del caso de referencia. Recordamos la expresión de $1/\kappa_w$:

$$\frac{1}{\kappa_w} = \frac{k_1 e_w}{k_w a_1}$$

En la siguiente tabla vamos a emplear como ejemplo de fluido 1 el agua, cuya conductividad térmica es $k_1 = 0.59 \text{ W/m K}$, para diferentes valores para la relación geométrica del intercambiador e_w/a_1 :

Material de pared		$e_w/a_1 = 0.1$	$e_w/a_1 = 0.2$	$e_w/a_1 = 0.4$
Cobre	386 W/m K	0.0002	0.0003	0.0006
Aluminio	202 W/m K	0.0003	0.0006	0.0012
Latón	99 W/m K	0.0006	0.0012	0.0024
Acero al carbono	45 W/m K	0.0013	0.0026	0.0052
Plomo	35 W/m K	0.0017	0.0034	0.0067
Titanio	19 W/m K	0.0031	0.0062	0.0124
Acero inoxidable	16 W/m K	0.0037	0.0074	0.0147
HDPE	0.50 W/m K	0.1180	0.2360	0.4720
LDPE	0.33 W/m K	0.1788	0.3576	0.7152
Teflón	0.25 W/m K	0.2360	0.4720	0.9440

Tabla 18: Valores reales del parámetro $1/\kappa_w$ para distintos metales y plásticos con diferentes configuraciones de intercambiador tomando como fluido de referencia el agua.

Ahora vamos a emplear como ejemplo de fluido 1 un aceite típico para intercambiadores de calor conocido como “aceite hidráulico” cuyo valor de conductividad térmica es $k_1 = 0.12 \text{ W/m K}$

Material de pared		$e_w/a_1 = 0.1$	$e_w/a_1 = 0.2$	$e_w/a_1 = 0.4$
Cobre	386 W/m K	$3 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0001
Aluminio	202 W/m K	0.0001	0.0001	0.0002
Latón	99 W/m K	0.0001	0.0002	0.0005
Acero al carbono	45 W/m K	0.0003	0.0005	0.0011
Plomo	35 W/m K	0.0003	0.0007	0.0014
Titanio	19 W/m K	0.0006	0.0013	0.0025
Acero inoxidable	16 W/m K	0.0008	0.0015	0.0030
HDPE	0.50 W/m K	0.0240	0.0180	0.0960
LDPE	0.33 W/m K	0.0364	0.0727	0.1455
Teflón	0.25 W/m K	0.0480	0.0960	0.1920

Tabla 19: Valores reales del parámetro $1/\kappa_w$ para distintos metales y plásticos con diferentes configuraciones de intercambiador tomando como fluido de referencia aceite hidráulico

Los fluidos que hemos empleado para realizar estas dos tablas (tablas 18 y 19) son sólo valores tomados para ilustrar y dar valores numéricos reales al parámetro de resistencia térmica en la pared. Además de estos dos fluidos se pueden emplear muchos otros. Algunos de los ejemplos de fluidos que se pueden emplear en los intercambiadores son:

Material fluido	Conductividad térmica
Agua	0.59 W/m K
Disolución 20/80 EGW	0.57 W/m K
Disolución 40/60 EGW	0.45 W/m K
Disolución 50/50 EGW	0.39 W/m K
Aceite hidráulico	0.12 W/m K
Aire	0.017 W/m K

Tabla 20: Algunos de los materiales fluidos que se pueden emplear en los intercambiadores junto con sus respectivas conductividades térmicas

Como podemos observar en las tablas 18 y 19, con valores reales de materiales empleados en la construcción de intercambiadores se barre todo el espectro de valores de $1/\kappa_w$ que hemos empleado en nuestras simulaciones.

Llegaremos únicamente a valores de resistencia térmica elevados cuando la pared de intercambio esté fabricada con algún plástico, en cuyo caso será necesario cambiar la geometría del intercambiador para obtener un valor de $1/\kappa_w$ menor y mejorar su eficiencia.

5. Conclusiones

A lo largo de este estudio hemos realizado la simulación numérica de un intercambiador de calor trabajando con flujo en contracorriente empleando el programa MATLAB.

Para ello hemos partido de un código proporcionado por el director del proyecto al que hemos realizado las modificaciones necesarias para poder simular cada uno de los casos: caso simplificado (caso 1) y caso general (caso2).

Seguidamente hemos realizado un estudio de las influencias y los efectos de cada una de las variables para cada uno de los casos de estudio. Dichos efectos se resumen en la tabla siguiente para el caso con transferencia transversal en la pared (caso 1):

<i>Condición</i>	<i>Efecto observado</i>
ξ_L creciente	ϵ creciente
m creciente con $\kappa = cte$	ϵ creciente (menor efecto que κ con $m = cte$)
κ creciente con $m = cte$	ϵ creciente (mayor efecto que m con $\kappa = cte$)
m creciente con $m\kappa = cte$	ϵ decreciente
κ creciente con $m\kappa = cte$	ϵ creciente
$1/\kappa_w$ creciente	ϵ decreciente
	Efectos de m y κ atenuados
ξ_L creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ decreciente
κ creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ y $\Delta\epsilon_{abs}$ creciente

Tabla 21: Resumen del estudio realizado para el intercambiador con transferencia de calor transversal

Donde los incrementos (para este caso decrementos) en eficiencia se han calculado de la siguiente manera:

$$\Delta\epsilon_{abs} = \theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0} - \theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0.5} \quad (38)$$

$$\Delta\epsilon_{rel} = \frac{\theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0} - \theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0.5}}{\theta_{m1,out}|_{1/\kappa_w=0}} \quad (39)$$

A la hora de hablar de este caso, y gracias a la cantidad de simulaciones realizadas, hemos observado que debido al comportamiento asintótico de la eficiencia hacia el valor 1, todos los efectos comentados en la tabla 21 se ven claramente alterados.

En la figura 29 es en la que mejor se puede ver el efecto de la proximidad a eficiencias de valor unidad. Se puede ver claramente cómo todas las líneas que se representan comienzan a cruzarse y la figura pierde claridad notablemente para intercambiadores de calor largos.

Respecto del caso con transferencia de calor longitudinal en la pared, hemos podido observar que la eficiencia del intercambiador aumenta en mayor o menor medida (figura 40), respecto del caso en el que no hay transferencia de calor longitudinal. Los resultados del análisis del caso con transferencia de calor longitudinal se presentan en la siguiente tabla:

<i>Condición</i>	<i>Efecto observado</i>
ξ_L creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ decreciente
$1/\kappa_w$ creciente	$\Delta\epsilon_{rel}$ y $\Delta\epsilon_{abs}$ decreciente

Tabla 22: Resumen del estudio realizado para el intercambiador con transferencia de calor longitudinal

Los incrementos de eficiencia en este caso se han calculado con las siguientes expresiones:

$$\Delta\epsilon_{abs} = \theta_{m1,out}|_{\text{Con transf. long.}} - \theta_{m1,out}|_{\text{Sin transf. long.}} \quad (40)$$

$$\Delta\epsilon_{rel} = \frac{\theta_{m1,out}|_{\text{Con transf. long.}} - \theta_{m1,out}|_{\text{Sin transf. long.}}}{\theta_{m1,out}|_{\text{Sin transf. long.}}} \quad (41)$$

Queremos recordar que al realizar estas simulaciones y con objeto de poder observar bien los cambios introducidos al permitir la transferencia longitudinal de calor hemos introducido valores para el Pe_1 que hemos considerado como casos límite.

6. Bibliografía consultada, referencias y nomenclatura empleada

6.1 Bibliografía consultada

Frank P. Incropera, David P. de Witt, *“Fundamentos de Transferencia de Calor”*, Ed. Prentice Hall, 4ª ed, 1999

Apuntes de la asignatura *“Simulación de Flujos Industriales con Ordenador”*, impartida por la profesora Inmaculada Iglesias Estrade, 5º curso de Ingeniería Industrial Superior, especialidad de Tecnologías Energéticas

Apuntes de la asignatura *“Sistemas Térmicos”*, impartida por el profesor Domingo José Santana Santana, 4º curso de Ingeniería Industrial Superior, especialidad de Tecnologías Energéticas

<http://www.mathworks.es/es/help/matlab>, *“MathWorks Documentation Center”*

<http://www.engineeringtoolbox.com>, *“Thermal Conductivities of Heat Exchangers”*

<http://www.engineeringtoolbox.com>, *“Thermal Conductivity Coefficients Plastics”*

<http://www.lytron.com>, *“Material Properties”*

6.2 Referencias

- [1] M. Vera, A. Liñán, Exact solution for the conjugate fluid–fluid problem in the thermal entrance region of laminar counterflow heat exchangers, *Int. J. Heat Mass Transfer* 54 (2011) 490–499
- [2] M. Vera, A. Liñán, Laminar counterflow parallel-plate heat exchangers: Exact and approximate solutions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 53 (2010) 4885–4898

6.3 Nomenclatura

a_i	Semi-ancho del canal i
c_i	Calor específico del fluido i
e_w	Espesor de la pared de intercambio
k_i	Conductividad térmica del fluido i
k_w	Conductividad térmica de la pared de intercambio
L	Longitud del intercambiador
m	Relación adimensional de números de Peclet, $(a_2 Pe_2)/(a_1 Pe_1)$
Pe_i	Número de Peclet del fluido i , $(2a_i V_i)/\alpha_i$
Pr_i	Número de Prandtl del fluido i , $\mu_i/(\rho_i \alpha_i)$
Re_i	Número de Reynolds del fluido i , $(2a_i V_i \rho_i)/\mu_i$
T_i	Temperatura del fluido i
U_i	Distribución de velocidades longitudinales del fluido i
V_i	Velocidad promedio del fluido i
X	Coordenada dimensional longitudinal
Y_i	Coordenada dimensional transversal del fluido i
y_i	Coordenada adimensional transversal del fluido i , Y_i/a_i
α_i	Difusividad térmica del fluido i , $k_i/(\rho_i c_i)$
δ_w	Espesor adimensional de pared de intercambio, e_w/a_i
ϵ	Eficiencia del intercambiador de calor
η_i	Coordenada adimensional numérica transversal del fluido i
θ_i	Temperatura adimensional normalizada del fluido i
κ	Relación adimensional de conductividades 2 a 1, $(a_1 k_2)/(a_2 k_1)$
κ_w	Relación adimensional de conductividades w a 1, $(a_1 k_w)/(e_w k_1)$
μ_i	Viscosidad del fluido i
v_i	Flujo de calor en el fluido i , $k_i(\partial T_i/\partial Y_i)$
v_{iw}	Flujo de calor en el fluido i evaluado en la pared, $k_i(\partial T_i/\partial Y_i _{Y_i=a_i})$
v_w	Flujo de calor en la pared, $k_w(\Delta T/e_w)$
ξ	Coordenada adimensional longitudinal, $X/(a_1 Pe_1)$
ξ_L	Longitud adimensional del intercambiador, $L/(a_1 Pe_1)$
ρ_i	Densidad del fluido i
χ	Coordenada adimensional numérica longitudinal